КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Ж.БАЛАСАГЫН АТЫНДАГЫ КЫРГЫЗ УЛУТТУК УНИВЕРСИТЕТИ

Кол жазма укугунда

УДК 517.956

МУКАНБЕТОВА АЙЗАТ ТЕМИРБЕКОВНА

ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕЛЕР

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги

Физика-математикалык илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертация

Илимий жетекчиси: физика-математика илимдеринин доктору, профессор Аблабеков Б.С.

Бишкек-2023

М А З М У Н У

	ШАРТТУУ БЕЛГИЛЕРДИН ТИЗМЕСИ	4
	КИРИШҮҮ	6
1-ГЛАВА	**АДАБИЯТТАРГА ЖАНА ДИССЕРТАЦИЯНЫН НАТЫЙЖАЛАРЫНА ТАЛДООЛОР**	11
1.1.	Адабияттарга талдоолор	11
1.2.	Диссертациянын жыйынтыктарынын топтому	19
	Биринчи глава боюнча корутунду	30
2 -ГЛАВА	**ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДОЛОГИЯСЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ**	31
2.1	Изилдөөнүн объектилери жана предмети	31
2.2.	Изилдөөнүн методдору	35
	Экинчи глава боюнча корутунду	44
3-ГЛАВА	**ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ТҮЗ МАСЕЛЕЛЕР**	45
3.1.	Кичи параметрлүү бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы- чектик маселе	45
3.2.	Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы- чектик маселенин чечимдүүлүгү жөнүндө	52
3.3.	Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн жарым октогу чектик маселе	59
3.4.	Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү чектик маселенин чыгарымдуулугу жөнүндө	69

	Үчүнчү глава боюнча корутунду	75
4-ГЛАВА	**ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕЛЕРИ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ**	76
4.1.	Псевдопараболалык теңдеме үчүн тескери чектик маселенин чечимдүүлүгү жөнүндө	76
4.2.	Псевдопараболалык теңдеме үчүн интегралдык кайра аныктоосу менен тескери чектик маселеси	80
4.3.	Белгисиз чектик шарты бар псевдопара- болалык теңдеме үчүн тескери маселенин бир маанилүү чечимдүлүгү жөнүндө	86
4.4.	Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселенин чечими жөнүндө	90
4.5.	Жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн бир чектик тескери маселеси жөнүндө	94
4.6.	Жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн чектик тескери маселенин чечимдүүлүгү жөнүндө	99
4.7.	Экинчи түрдөгү чектик шарттары менен тескери убакыттагы корректүү эмес коюлган жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн квазиинверсия ыкмасы	106
	Төртүнчү глава боюнча корутунду	115
	КОРУТУНДУ	116
	ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР	117
	КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАРДЫН ТИЗМЕСИ	118

ШАРТУУ БЕЛГИЛЕРДИН ТИЗМЕСИ

Алгач биз керектүү шарттуу белгилерди жана аныктамаларды киргизели:

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ – натуралдык сандардын көптүгү, $T,l>0$ – фиксирленген турактуу сандар;

$\mathbb{R}$ – чыныгы сандардын көптүгү;

$Q_T=\{(x,t):x\in\mathbb{R},t\in(0,T]\},Q_T^+=\{(x,t):x\in(0,+\infty),t\in(0,T]\},$

$\Omega_T=\{(t,x)\,|\,0<x<l,\ 0<t\le T\},$

$D_T=\{(x,t)|\ x\in(0,\pi),t\in(0,T]\},$

$\Pi_T=\{(x,t):x\in(0,1),t\in(0,T]\}.$

$\exists$ – жашоо квантору; $\exists!$ – жашайт жана жалгыз;

$\in$ – «тиешелүү» же «таандык»;

$\Rightarrow$ – «келип чыгат»;

$C(D)$ – D аймагында үзгүлтүксүз функциялардын көптүгү;

$C^k(D)$ – D аймагында k- тартипке чейинки (k- кошо) үзгүлтүксүз туундуларга ээ болгон функциялардын мейкиндиги;

$C_0^1[0,T]\equiv\left\{\psi(t)\in C^1[0,T],\quad \psi(0)=0\right\},$

$C^{(n,m)}(\Omega_T)$ – каалагандай $(x,t)\in\Omega_T$ үчүн $\partial^{k+l}v/\partial x^k\partial t^l\in C(\Omega_T)$, $0\le k\le n,\ 0\le l\le m$ туундулары менен кошо аныкталган $v(x,t)$ функцияларынын мейкиндиги;

$C^{(n,m)}(Q_T)$ – $0\le k\le n,\ 0\le l\le m$ үчүн $\partial^{k+l}v/\partial x^k\partial t^l\in C(Q_T)$ болгон жана Q_T да аныкталган $v(x,t)$ функциялардын мейкиндиги;

1- аныктама. Эгерде $\gamma\ge 0$ чыныгы сан үчүн $C(t)$ үзгүлтүксүз оң функциясы табылып жана

$$|v(x,t)|\le C(t)\exp\{\gamma|x|\},\ (x,t)\in\bar{Q}_T$$

баалоосу орун алса, анда $v(x,t)$ функциясы $M_\gamma(Q_T)$ классына таандык деп айтабыз.

$C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T)$ – өздөрүнүн (n,m) тартибине чейинки туундулары менен бирге $M_\gamma(Q_T)$ таандык болгон $C^{(n,m)}(Q_T)$ дагы функциялардын көптүгү, б.а. $0 \le k \le n,\ \ 0 \le l \le m$ үчүн $\partial^{k+l} v / \partial x^k \partial t^l \in M_\gamma(Q_T)$.

Ушул эле сыяктуу $C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T^+)$, $C_{M_\gamma}^{(n)}(-\infty,\infty)$ мейкиндиктери дагы аныкталат.

КИРИШҮҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Жаракалуу-тешиктүү чөйрөлөрдө суюктукту чыпкалоонун, гетерогендүү чөйрөдө жылуулук берүүнүн, топурактагы ным берүүнүн көптөгөн маселелери үчүнчү даражадагы псевдопараболикалык теңдемелер үчүн баштапкы, баштапкы чектик (түз) жана тескери маселелерди изилдөөгө алып келет.

Мисалы, жаракалуу-тешиктүү чөйрөлөрдө суюктукту чыпкалоонун кыймылынын теңдемеси төмөнкү теңдем менен сүрөттөлөт[1]:

$$\beta_0(x)D_t p(x,t) - div[\frac{k(x)}{\mu(x)} grad\ p(x,t) + \eta(x)\beta_0(x)D_t grad\ p(x,t)] = 0,$$

мында $p(x,t)$ - жаракалардагы суюктуктун басымын мүнөздөгөн изделүүчү функция; $k(x)$ - жаракалардагы өткөрүмдүүлүк коэффициенти; $\beta_0(x)$ - суюктуктун кысылуу коэффициенти; $\mu(x)$- суюктуктун илешкектүүлүгү, $\eta(x)$ - пьезоөткөргүчтүк коэффициенти.

А.Ф. Чудновскийдин “Теплофизика почв” аттуу монографиясында кыртыштагы нымдын кыймылынын закон-ченемдүүлүктөрүн окуп үйрөнүүдө диффузиянын модификацияланган теңдемеси (Аллердин теңдемеси [72]):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right]$$

каралган, мында w- нымдуулук, x– тереңдик, t – убакыт $D(w) = K\frac{\partial \psi}{\partial x}$- диффузия коэффициенти, K – нымдуулукту өткөрүмдүүлүк коэффициенти, ψ – нымдуулук потенциалы, A – варияция коэффициенти.

Аллер тарабынан киргизилген $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ кошумча мүчөсү нымдуулук градиентине каршы нымдуулук кыймылынын эксперименталдык далили аркылуу түшүндүрүүгө арналган.

Белгилүү бир физикалык кубулушту сүрөттөгөн ар кандай математикалык моделдин эң маанилүү мүнөздөмөсү бул математикалык моделдин *корректүү* чыгарылышы жөнүндөгү маселе, б.а. изилденип жаткан моделдин алкагында чыгарылыштын бир маанилүү чыгарымдуулугу жөнүндө маселе, ошондой эле берилиштердин кичине (тигил же бул мааниде) өзгөрүүлөрүнө тиешелүү чыгарылыштын кичине өзгөрүүсү туура келген маселе, б.а.туруктуулугу жөнүндө маселе. Физикалык кубулуштун тандалган математикалык моделинде бул касиеттердин болушу бул моделди сүрөттөгөн физикалык кубулуштун адекваттуулугун тастыктаган эң маанилүү факты болуп саналат.

Дифференциалдык теңдемелер үчүн *тескери маселелер* деп түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кээ бир кошумча маалыматтардан (кайра аныктоо шарттарынан) дифференциалдык теңдемелердин коэффициенттерин, оң жактарын (булак функцияларын), ошондой эле баштапкы же чектик шарттарын жана чыгарылышын аныктоо маселелери аталат. Мындай маселелер каралып жаткан процесстин математикалык моделинин структурасы белгилүү болгон учурларда пайда болот.

Сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселе *сызыктуу* деп аталат, эгерде тышкы булак функциясы, ошондой эле баштапкы же чектик шарттар изделсе. Эгерде теңдеменин бир же бир нече коэффициенттери изделсе, анда жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселе *коэффициенттик* тескери маселеси деп аталат. «Тескери маселе» терминин орустун көрүнүктүү математиктери М.М. Лаврентьев (1969) жана В.Г. Романов (1969) киргизишкен.

Диссертациянын темасынын окуу жана илимий мекемелер тарабынан жүргүзүлүп жаткан негизги изилдөө иштери менен байланышы:

Диссертациялык жумуш Ж.Баласагын атындагы КУУнин математика жана информатика факультетинин «Колдонмо математика, информатика жагна компьютердик технологиялар” кафедрасынын илим изилдөө

багыттары менен байланышта аткарылды.

Изилдөөнүн максаты жана коюлган маселелер. Диссертациянын максаты бир өлчөмдүү сызыктуу псевдопараболалык теңдемедеги чектик функцияны аныктоо тескери маселелеринин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын жөнүндөгү теоремаларды далилдөө болуп саналат.

Изилдөөнүн жогорудагы максатына жетүү үчүн төмөнкү маселелер коюлду:

- үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн тиешелүү түз маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын табуу;
- үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын табуу.
- үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн
түз жана тескери маселелерди жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн түз жана тескери маселелерге колдонуу.

Иштин илимий жаңылыгы:

- кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн түз маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды;
- кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын камсыздоочу шарттар аныкталды.

Алынган натыйжалардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү. Диссертациянын бардык жыйынтыктары жаңы жана теориялык мүнөзгө ээ. Бирок дифференциалдык, интегро-дифференциалдык жана интегро-функционалдык теңдемелер үчүн тескери маселелерди изилдөөдө, физиканын, техниканын, экономиканын конкретүү түз жана тескери маселелерин чечүүдө кеңири колдонулуп келээрин эске алсак, анда бул иштин натыйжаларын айрым бир колдонмо маселелерди чечүүдө колдонууга боло тургандыгы келип чыгат. Диссертацияда алынган натыйжалар жогорку тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясынын өнүгүшүнө салымын кошот.

Диссертациянын коргоого коюлуучу негизги жоболору:

- Кичи параметрлүү бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн

биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселесинин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары;

- Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы- чектик маселесиин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын камсыз кылуучу жетиштүү шарттары;

-Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн жарым октогу чектик маселенин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары;

- Кичи параметрлүү псевдопараболикалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү чектик маселенин чыгарымдуулугун камсыз кылуучу жетиштүү шарттары;

- Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселесинин чектик функциясын аныктоо тескери маселесинин чечилиши;

- Псевдопараболалык теңдеме үчүн интегралдык кайра аныктоосу менен тескери чектик маселесинин чечилиши;

- Белгисиз чектик шарты бар псевдопараболалык теңдеме үчүн тескери маселенин бир маанилүү чечимдүлүгүн аныктоо;

- Жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн бир чектик тескери маселени чыгарымдуулугу;

- Жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн чектик тескери маселенин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын аныктоо;

- Жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн тескери убакыттагы экинчи түрдөгү чектик шарттары менен корректүү эмес коюлган маселеге квазиинверсия ыкмасынын псевдопараболикалык вариантын колдонуу.

Диссертациянын апробациясы. Диссертациянын негизги жыйынтыктары төмөнкү семинарларда жана эл аралык илимий конференцияларда баяндалды жана талкууланды:

- «Тескери жана корректүү эмес коюлган маселелерди чечүүнүн теориясы жана сандык ыкмалары», Новосибирск, Академшаарчасы, 10-13 октябрь,2018 жыл;

- Физика-математика илимдеринин азыркы проблемалары. V эл аралык илимий-практикалык конференция, 26-29-сентябрь,2019ж;

- Академик А. Бөрүбаевдин 70 жылдык юбилейине арналган "Математика-нын учурдагы көйгөйлөрү" аттуу эл аралык илимий конференция. – Бишкек: КР УИАнын математика институту, 16-18 июн, 2021-ж.;

-Физика-математика илимдеринин азыркы проблемалары. VII эл аралык илимий-практикалык конференция, 26-29-сентябрь,2021ж;

-Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин колдолнмо математика, информатика жана компьютердик технологиялар кафедрасынын семинарларында (Бишкек, 2021-2022 жж.)

-«Тескери жана корректүү эмес коюлган маселелер» семинарында (Бишкек, КМТКУ, 2018-2022), жетекчиси – физика-математика илимдеринин доктору, профессор Б.С.Аблабеков.

Диссертациянын натыйжаларынын жарыяланышы. Изилдөөлөр-дүн натыйжасында изденүүчү тарабынан 11 макала [41]-[51] жана эки докладдын тезиси жарыкка чыгарылган. Макалалар жарык көргөн журналдардын көпчүлүгүнүн РИНЦтеги импакт фактору 0,1 ден жогору. Үч макала кыргыз тилинде жарыкка чыккан [48], [50,51].

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертацияда чагылдырылган илимий жыйынтыктар авторго гана таандык. Биргелешкен иштерде маселенин коюлушу илимий жетекчи, ф.-м.и.д., профессор Б.С. Аблабековго таандык, ал эми алынган илимий жыйынтыктар изденүүчү А.Т. Муканбетовага таандык.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертация кириш сөздөн, төрт главадан, 15 бөлүмдөн турган, 92 аталыштагы адабияттардын тизмесинен жана корутундулардан турат. Диссертациянын жалпы көлөмү

126 бет. Формулалардын, аныктамалардын, леммалардын жана теоремалардын номерлениши үч орундуу белгиленген, б.а. эгерде формула (1.2.1) номерине ээ болсо, анда ал биринчи главанын экинчи бөлүмүнүн 1-формуласы экендигин билдирет.

ГЛАВА 1. АДАБИЯТТАРГА ЖАНА ДИССЕРТАЦИЯНЫН НАТЫЙЖАЛАРЫНА ТАЛДООЛОР

Бул главада диссертациянын темасы боюнча адабияттарга кыскача серептер жана диссертациянын кыскача мазмундар берилди.

1.1. Адабияттарга сереп салуу

Белгилүү болгондой, жаракалуу-тешиктүү чөйрөлөрдөгү суюктуктарды фильтрациялоонун, гетерогендүү чөйрөдө жылуулук берүүнүн жана топурактагы ным берүүнүн көптөгөн маселелери үчүнчү даражадагы псевдопараболалык теңдемелер үчүн баштапкы, баштапкы чектик (түз) жана тескери маселелерди изилдөөгө алып келет.

Мисалы, [10,11] жаракалуу - тешиктүү чөйрөлөрдөгү суюктуктарды фильтрациялоонун теңдемеси төмөнкү теңдеме менен сүрөттөлөт:

$$\beta_0(x)D_t p(x,t) - div[\frac{k(x)}{\mu(x)} grad\ p(x,t) + \eta(x)\beta_0(x)D_t grad\ p(x,t)] = 0, \quad (1.1.1)$$

мында $p(x,t)$ - тешиктүү чөйрөлөрдөгү суюктуктун басымын мүнөздөгөн белгисиз функция, $k(x)$ - жаракалардагы өткөргүмдүүлүк коэффициенти; $\beta_0(x)$ - суюктуктун кысылуу коэффициенти; $\mu(x)$ - суюктуктун илешкектүүлүгү, $\eta(x)$ - пьезоөткөрүү коэффициенти.

Г.И. Баренблат, Ю.П, Желтов, И.Н.Кочинанын [10,11], А.Г.Свешников, М.О. Корпусов, Ю.Д.Плетнердин [61], Р.Е. Шоуалтердин, Т.Тингдин [166-169], Д.Колтондун [78-81], В.Ранделлдин [85] эмгектери псевдопараболалык типтеги теңдемелер үчүн Коши маселесин жана аралаш маселелерди изилдөөгө арналган. Бул эмгектерде псевдопараболалык теңдемелер үчүн локалдык чектик маселелердин чыгарылышы боюнча суроолор изилденген. Атап айтканда, Д.Колтон [78] атайын бир псевдопараболалык теңдеме үчүн Риман функцияларын биринчилерден болуп тургузуп, мүнөздүү Гурса маселесинин жана биринчи баштапкы-чектик маселесинин регулярдуу чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдеген.

А.М. Нахушев [53], М.Х. Шхануков [69-71] дин эмгектеринде Самарский-Бицадзе тибиндеги локалдык эмес шарттары менен $u(0,t)=\lambda\, u(l,t)$ жана интегралдык шарттары $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u(x,t)dx=\mu(t)$ болгон үчүнчү даражадагы псевдопараболалык теңдемелердин чектик маселелерин чечүү мүмкүнчүлүгүн изилдеген.

А.Г Свешников, М.О. Корпусов, Ю.Д.Плетнердин [61] монографиясында псевдопараболалык типтеги моделдик сызыктуу эмес эллиптикалык операторлорунун алдында убакыт боюнча туундуну кармаган теңдемелердин бүткүл классы үчүн чыгарылыштын бир маанилүү чечимдүүлүгү жөндөмдүүлүгүн жана чыгарылыштын бузулушу, ошондой эле убакыт боюнча глобалдык чыгарылыштын бар же жок экендиги жөнүндөгү суроолор изилденген.

Дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин азыркы учурдагы теориясы орус математиктери А.Н.Тихоновдун, М.М.Лаврентьевдин жана В.Г. Романовун эмгектеринде жаралган жана өнүктүрүлгөн. Тескери маселелер теориясынын өнүгүү тарыхы, анын азыркы абалы, кеңири библиографиясы [19,30,58,67,83,84] монографияларда берилген.

Кийинчерээк бул маселелер Ю.Е.Аникононовдун [7], Н.Я.Безношенконун [12-14], Ю.Я.Беловдун [15-16], А.Л. Бухгеймдин [18-19], С.И. Кабанихиндин [28-30], А.И. Кожановдун [31,32], М.М. Лаврентьевдин [84-88], А.И. Прилепконун [33,34,56-57,83], В.Г. Романовдун [58,59,84], В.Г. Яхно [77], Ж.Р. Кенондун [78] жана башка бир катар авторлордун эмгектеринде изилденип, иштелип чыккан.

Бул эмгектерде экинчи даражадагы теңдемелер үчүн тескери маселелер изилденген.

Псевдопараболалык теңдемелер үчүн Коши маселелери, локалдык, локалдык эмес жана баштапкы-чек ара маселелери Б.С.Аблабековдун [2-4],

Д.Колтондун [78-81], М.Х. Шхануковдун [69-71] жана башкалардын эмгектеринде изилденген.

Д.Колтон өзүнүн эмгектеринде [80,81] тескери убакыттагы жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн корректүү эмес коюлган Коши маселесин изилдеп, псевдопараболалык теңдеме терминин киргизген.

Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер Б.С. Аблабековдун [2,5,6], А.Асановдун, Э.Р. Атамановдун [9,75], Э. Р.Атаманов, М.Ш. Мамаюсуповдун [8] монографияларында изилденген жана кененирээк маалыматтарды ушул монографиялардан табууга болот.

Э.Р.Атаманов жана М.Ш.Мамаюсупов [8] монографиясында Вольтерранын интегралдык теңдемелеринин ыкмасын колдонуу менен төмөнкү бир өлчөмдүү тескери маселелерди изилдешкен:

1 – маселе. $\{u(x,t), f(t)\}$ экилдик функцияларын төмөнкү шарттардан тапкыла:

$$u_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + q(x,t)u(x,t) + f(t),\ 0 < x < 1, 0 < t \le T, \quad (1.1.2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad (1.1.3)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad (1.1.4)$$

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \quad (1.1.5)$$

мында $x_0 \in (0,1) -$ белгиленген сан.

2 – маселе. $\{u(x,t), f(x)\}$ экилдик функцияларын төмөнкү шарттардан тапкыла:

$$u_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + q(x,t)u(x,t) + f(x),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T, \quad (1.1.6)$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad (1.1.7)$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad (1.1.8)$$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad (1.1.9)$$

мында $T>0$ – фиксирленген сан.

3 – маселе. $\{u(x,t),q(x)\}$ экилдик функцияларын төмөнкү шарттардан тапкыла:

$$u_t(x,t)=L_q(u_t+u)(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t\le T, \qquad (1.1.10)$$

$$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1, \qquad (1.1.11)$$

$$u(0,t)=\varphi_1(t), \quad u_x(0,t)=\varphi_2(t), \quad 0\le t\le T, \qquad (1.1.12)$$

$$u(x,T)=\psi(x), \quad 0\le x\le 1, \qquad (1.1.13)$$

мында $L_q\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-q(x)$, $T>0$ – фиксирленген сан.

Берилген маселелер үчүн тиешелүү чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теоремалар далилденген.

W.Rundell 1980 – жылы ([85]) эмгегинде төмөнкү шарттардан экилдик функцияларын $f(x)\in L_2(\Omega), u(x,t)\in \overset{0}{W}{}^1_2(\overline{\Omega}_T)\bigcap W_2^2(\Omega_T)$ табуу тескери маселесинин чечилишин караган:

$$(L+I)u_t(x,t)+\eta Lu(x,t)=f(x), (x,t)\in\Omega_T, \qquad (1.1.14)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u(x,T)=u_1(x), x\in\overline{\Omega}, \qquad (1.1.15)$$

$$u(x,t)=0, x\in\partial\Omega, 0<t<T, \qquad (1.1.16)$$

мында $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – мейкиндигинде чектелген область, $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$, $\eta>0$ – турактуу сан, I – бирдик оператор,

ал эми $Lu\equiv-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+a(x)u$

оператору экинчи тартиптеги бир калыптагы эллиптикалык оператор , б.а.

1) $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ a(x)\in C(\overline{\Omega}),$

2) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^2, \quad \forall u \in C^2(\Omega_T), \gamma > 0,$

Жарым группалар ыкмасы колдонуу менен, (1.1.14) − (1.1.16) тескери маселесинин чыгарымдуулугу жөнүндө төмөнкүдөй теорема далилденди.

1.1.1 − теорема Мейли $u_0(x), u_1(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\bar{\Omega}) \bigcap W_2^2(\Omega)$. Анда каалагандай $T > 0$ учун (1.1.14) − (1.1.16) маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз, мындан тышкары $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\bar{\Omega}_T) \bigcap W_2^2(\Omega_T),\ f(x) \in L_2(\Omega)$.

А. Асанов, Э. Р. Атаманов [9] ишинде оператордук интегро-дифференциалдык псевдопараболалык тендеме үчүн убакыттан көз каранды болгон ядросун аныктоо боюнча төмөнкү тескери маселе иликтенген:

төмөнкү шарттардан $\{u(t), K_i(t)\} \in C^1([0,T]; D(A)) \times C([0,T])$ функцияларын табуу керек

$$u'(t) = (Au)' + \beta(Au) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t K_i(t-s)B_i u(s)ds + f(t), \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (1.1.17)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \qquad (1.1.18)$$

$$\Phi_i(A-I)u = g_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2,\ldots,m, \qquad (1.1.19)$$

мында $\beta > 0 - const$.

Орун алат

1.1.2 – теорема Мейли 1) $A: D(A) \subset X \to X,\ B_i : D(B_i) \subset X \to X$ - сызыктуу жабык операторлор; $D(A) \subset D(B_i), \quad i = 1,2,...m,$

2) $A - I$ операторунун тескери оператору жашайт, б.а. $(A-I)^{-1} \in L(X)$,

3) $f(t) \in C^1([0,T]; X)$, $g_i(t) \in C^2[0,T], \quad i = 1,2,\ldots,m,$

4) $\Phi_i \in L(X,R), \quad i = 1,2,...,m$ оператору үчүн

$$M=\begin{pmatrix} \Phi_1(B_1u_0)\ \ \Phi_1(B_2u_0)\ldots\Phi_1(B_mu_0) \\ \Phi_2(B_1u_0)\ \ \Phi_2(B_2u_0)\ldots\Phi_2(B_mu_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(B_1u_0)\ \ \Phi_m(B_2u_0)\ldots\Phi_m(B_mu_0) \end{pmatrix}$$

матрицасынын аныктагычы нөлдөн айырмалуу. Анда $T^{'}\in(0,T]$ саны табылып, (1.1.17) – (1.1.19) тескери маселесинин $\{u(t),K_1(t),K_2(t),...,K_m(t)\}$ жалгыз чышгарылышы $C^1([0,T^{'}];D(A))\times C_m[0,T^{'}]$ мейкиндигинде жашайт.

Мындан тышкары үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн ар түрдүү тескери маселелер [2] монографиясында изилденген. Бул эмгекте негизинен Галеркиндин ыкмасы, Вольтерранын интегралдык теңдемелер ыкмасы, Римандын функциясы ыкмасы, жүктөлгөн теңдемелер ыкмасы (метод нагруженных уравнений) жана банахтын мейкиндиктеринин шкаласынын аппараттары колдонулган.

Эми биз псевлопараболалык тендеме үчүн буга чейин изилденген чектик тескери маселелерге токтололу. Соболев тибиндеги теңдемеге келсек, атап айтканда псевдопараболикалык теңдеме үчүн мындай маселелер аз изилденген.

А.И.Кожанов [32] эмгегинде төмөнкү чектик маселелерди изилдеген:

1 – тескери маселе. $u(x,t)$ жана $q(t)$ функцияларын табуу керек, эгерде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u-\Delta u\right]+\alpha\Delta u=f(x,t),\ x\in\Omega,\ 0<t\le T, \qquad (1.1.20)$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \qquad (1.1.21)$$

$$u(x,t)=q(t)h(x),\quad (x,t)\in S, \qquad (1.1.22)$$

$$\int_\Omega N(x)u(x,t)dx=0,\ 0<t<T. \qquad (1.1.23)$$

Мында $\Delta-$ $(x_1,x_2,...,x_n)$өзгөрмөлөрү боюнча Лапластын оператору, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ мейкиндигинде чектелген область, $S=\partial\Omega\times(0,T]$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$ областынын

каптал границасы, α – чыныгы берилген сан, $f(x,t), N(x), h(x)$ - Ω_T жана Ω областарында аныкталган белгилүү функциялар.

X_1 сызыктуу мейкиндигин аныктайлы:

$X_1 = \{\vartheta(x,t): \quad \vartheta(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad \vartheta_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\}$,

ал эми тиешелүү норма төмөнкүчө берилсин:

$$\|\vartheta\|_{X_1} = \left(\|\vartheta\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|\vartheta_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \right)^{1/2}.$$

Мейли $h_1(x)$ функциясын төмөнкү маселенин чыгарылышы катары аныктайлы:

$$\Delta h_1(x) - h_1(x) = 0,\ x \in \Omega,\ h_1(x) = h(x),\ x \in \partial\Omega.$$

Ал эми $h_2(x)$ функциясын төмөнкү маселенин чыгарылышы катары аныктайлы:

$$\Delta h_2(x) - h_2(x) = 0,\ x \in \Omega,\ \frac{\partial h_2(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) h_2(x) = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Мейли $\{w_{2k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ төмөнкү маселенин

$$\Delta w(x) = \lambda w(x),\ x \in \Omega,\ \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) w = 0,\ x \in \partial\Omega$$

маселесинин $L_2(\Omega)$ нормаланган мейкиндигиндеги өздүк функциялар системасы, ал эми $\lambda_{2k}, k = 1,2,...,$ тиешелүү өздүк маанилери болсун.

1.1.3 – теорема. Мейли $N(x) \in C(\bar{\Omega}),\ h(x) \in W_2^2(\Omega),\ f(x,t) \in L_2(\Omega_T)$ шарттары аткарылсын жана $N_1 \neq 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} b_{1k} e^{-\beta_{1k} T}$ сандык катары абсолюттук жыйналсын. Анда 1 – тескери маселесиинин чыгарылышы $\{u(x,t), q(t)\}$ жашайт жана $u(x,t) \in X$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Мында

$$N_1 = \int_\Omega N(x) w_{1k}(x) dx,\ b_{1k} = \int_\Omega N(x) h_1(x) dx,$$

$$\gamma_{1k} = \frac{\alpha \lambda_{1k} a_{1k}}{1-\lambda_{1k}},\ \beta_{1k} = \frac{\alpha \lambda_{1k}}{1-\lambda_{1k}}.$$

2 – тескери маселе. $u(x,t)$ жана $q(t)$ функцияларын табуу керек, эгерде $u(x,t)$ функциясы үчүн (1.1.20),(.1.1.21) , (1.1.23) жана

$$\frac{u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x) u = q(t) h(x), \quad (x,t) \in S \qquad (1.1.24)$$

шарттары аткарылса, мында $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$- ички нормалдын вектору $x \in \partial\Omega$ке карата, $\sigma(x)$ – $x \in \partial\Omega$ да аныкталган белгилүү функция.

1.1.4 – теорема Мейли $N(x) \in C(\bar{\Omega}),\ h(x) \in W_2^2(\Omega),\ \sigma(x) \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \le 0$ при $x \in \partial\Omega$, $f(x,t) \in L_2(\Omega_T)$ шарттары аткарылсын жана $N_1 \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} b_{2k} e^{-\beta_{2k} T}$ сандык катары абсолюттук жыйналсын. Анда 1 – тескери маселесиинин чыгарылышы $\{u(x,t), q(t)\}$ жашайт жана $u(x,t) \in X$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Мында

$$N_2 = \int_\Omega N(x) w_{2k}(x) dx,\ a_{2k} = \int_\Omega N(x) \Delta h_2(x) dx,\ b_{2k} = \int_\Omega N(x) w_{2k}(x) dx,$$

$$\gamma_{2k} = \frac{\alpha \lambda_{2k} a_{2k}}{1-\lambda_{2k}},\ \beta_{2k} = \frac{\alpha \lambda_{2k}}{1-\lambda_{2k}}.$$

1.2. Диссертациянын жыйынтыктарынын топтому

Киришүүдө изилденүүчү теманын актуалдуулугу негизделет, иштин максаты формулировкаланат жана изилденип жаткан тема боюнча адабияттарга сереп салынат.

Биринчи глава эки бөлүмдөн турат. 1.1 – бөлүм диссертацияга байланышкан адабияттарга кыскача серептер берилет.

1.2 – бөлүмдө диссертациянын жыйынтыктарынын топтому келтирилген.

Экинчи глава изилдөөнүн методологиясына жана методоруна арналган.

Бул главанын биринчи бөлүмүндө диссертациялык жумуштагы изилдөөнүн объектилери каралган.

Ал эми экинчи бөлүмүндө диссертациялык жумушка байланышкан ыкмалар келтирилген.

Үчүнчү глава төрт бөлүмдөн турат жана псевдопараболалык теңдемелердин бир катар түз (баштапкы жана баштапкы-чектик) маселелерин карайт. Бул главанын негизги жыйынтыгы каралып жаткан маселелердин туура коюлгандыгынын далили болуп саналат, бул тескери маселелерди изилдөөдө маанилүү.

3.1 бөлүмүндө биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселе каралган. Төмөнкү шарттардагы белгилүү функциялар боюнча $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ функциясын табуу маселесин карап көрөлү:

$$u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} - u_{xx} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x < 1, \tag{1.2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1.2.2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2.3}$$

мында $\varepsilon > 0$ – кичи параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t), \psi(t)$ – берилген функциялар.

Берилген функциялар үчүн төмөнкү жылмакай шарттар жана макулдашуу шарттары аткарылсын:

$$u_0(x) \in C^2[0,1], \varphi(t), \psi(t) \in C^1[0,T], \tag{1.2.4}$$

$$u_0(0)=\varphi(0)=0,\ u_0(1)=\psi(0)=0. \qquad (1.2.5)$$

Жаңы

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+w(x,t), \qquad (1.2.6)$$

өзгөртүү киргизебиз, мында $v_\varepsilon(x,t)$ – жаңы белгисиз функция, ал эми

$$w(x,t)=\varphi(t)+x\big(\psi(t)-\varphi(t)\big),$$

Анда (1.2.1) – (1.2.3) маселесин төмөнкү маселеге келтиребиз:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (1.2.7)$$

$$v_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (1.2.8)$$

$$v_\varepsilon(0,t)=0,\ v_\varepsilon(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \qquad (1.2.9)$$

Жогорудагы ой жүгүртүүдөн келип чыгат (1.2.1) – (1.2.3) маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ экендигин далилдөө үчүн (1.2.7) – (1.2.9) баштапкы чектик маселени бир маанилүү чыгарылышка ээ экендигин жөнүндөгү теореманы далилдөө жетиштүү.

1.2.1 – теорема. Мейли берилген функциялар (1.2.4), (1.2.5) шарттарын канааттандырсын. Анда каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн (1.2.7) – (1.2.9) маселесинин чыгарылышы $\exists!$ жана аны төмөнкү түрдө көрсөтүүгө болот

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t)-\varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x)-\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t\left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\Big[(-1)^n\psi(\tau)-\varphi(\tau)\Big]\right)d\tau\sin(n\pi x),\end{aligned} \qquad (1.2.10)$$

мында

$$u_{0n}=2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx. \qquad (1.2.11)$$

3.2 бөлүмүндө кичи параметрди кармаган экинчи түрдөгү баштапкы – чектик маселе каралган:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (1.2.12)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ 0\le x\le l, \qquad (1.2.13)$$

$$\left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)=\varphi(t),\ \left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(l,t)=\psi(t),\ 0\le t\le T. \qquad (1.2.14)$$

Мында $\alpha>0-$ кичи параметр.

1.2.2 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2[0,l],\varphi(t)\in C^1[0,T],\psi(t)\in C^1[0,T]$, мындан тышкары төмөнкү макулдашылган шарттар аткарылсын $u_0(0)=\mu(0),\quad u_0^{'}(0)=\varphi(0),\ u_0^{'}(l)=\psi(0)$. Анда (1.2.12) – (1.2.14) маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

3.3 бөлүмүндө кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн жарым октогу баштапкы – чектик маселе изилденген.

Биз Q_T^+ аймагында псевдопараболикалык теңдеме үчүн баштапкы-чектик маселени карап көрөлү

$$Lu(x,t)\equiv u_t(x,t)-\alpha^2u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T^+, \qquad (1.2.15)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in[0,+\infty), \qquad (1.2.16)$$

$$u(0,t)=h(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (1.2.17)$$

мында $\alpha>0-$кичи параметр.

(1.2.15) – (1.2.17) маселеси – параболалык теңдеме үчүн жарым октогу баштапкы-чектик маселенин сингулярдык козголушу

$$\begin{cases}\vartheta_t(x,t)-\vartheta_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T^+,\\ \vartheta(x,0)=u_0(x),\quad x\in[0,+\infty),\\ \vartheta(0,t)=h(t),\quad 0\le t\le T.\end{cases} \qquad (1.2.18)$$

1.2.1 – аныктама. Эгерде $u(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$ функциясы (1.3.1) теңдемесин, (1.3.2) баштапкы шарттын жана (1.3.3) чектик шарттын классикалык мааниде канааттандырса, анда $u(x,t)$ функциясы (1.3.1) – (1.3.3) маселесинин классикалык чыгарылышы деп аталат,.

1.2.3 – теорема. Эгерде $\gamma < T-\alpha$ үчүн $u_0(x)\in C^{2}_{M_\gamma}[+($ $f(x,t)\in C^{(1\ 0)}_{M_\gamma}(\bar{Q}_T^+)$ $h(t)\in C^{1}[$ жана $f(0,t)=0, u_0(0)=h(0)=0$ болсо, анда Q_T^+ аймагында $C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T^+)$ге таандык болгон (1.2.15) – (1.2.17) маселесинин классикалык $\exists!$. Бул чыгарылыш төмөндөгүдөй түргө ээ:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^\infty \left[G(x-s,t)-G(x+s,t)\right]u_0(s)ds + e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t) + \\
&+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\, d\tau + \\
&+\int_0^t\int_0^\infty \left[G_\alpha(x-s,t-\tau)-G_\alpha(x+s,t-\tau)\right]f(s,\tau)ds\,d\tau.
\end{aligned}
\qquad (1.2.19)
$$

Мында

$$
G(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x d\xi, \qquad (1.2.20)
$$

$$
G_\alpha(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi. \qquad (1.2.21)
$$

3.4 бөлүмүндө кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү чектик маселенин чыгарымдуулугу жөнүндө маселе изилденген.

Биз D_T областында кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш баштапкы – чектик маселени карайлы

$$
\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in D_T, \qquad (1.2.22)
$$

$$
u(x,0)=u_0(x), \ \ 0\le x\le\pi, \qquad (1.2.23)
$$

$$
u(0,t)=\varphi(t), \ \left(\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\pi,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \qquad (1.2.24)
$$

Мында $\varepsilon>0$ – кичи параметр.

(1.2.22) теңдемеси ε кичи параметрин кармагандыктан, (1.2.22) – (1.2.24) маселенин чыгарылышы ушул параметрге көз каранды жана мындан ары аны $u_\varepsilon(x,t)$ менен белгилейбиз.

(1.2.22) – (1.2.24) маселеси – параболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү баштапкы чектик маселенин сингулярдык козголушу болот:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (1.2.25)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \;\; 0\le x\le\pi, \qquad (1.2.26)$$

$$u(0,t)=\varphi(t), \; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=\psi(t), \; 0\le t\le T. \qquad (1.2.27)$$

1.2.4 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2[0,l], \varphi(t)\in C^1[0,T], \psi(t)\in C^1[0,T]$, мындан тышкары $u_0(0)=\varphi(0)=0, \varphi^{'}(0)=0, u_0^{'}(\pi)=\psi(0)=0, \psi(0)=0$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда (1.2.22) – (1.2.4) маселесинин чыгарылышы ∃! жана

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x + \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right) z(\tau)d\tau\sin\lambda_n x \end{aligned} \qquad (1.2.28)$$

түрүнө ээ. Мында $\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$.

Төртүнчү главада ар кандай чектик тескери маселелер, б.а.чек ара шартына кирген функция белгисиз болгон учурда псевдопараболалык теңдеменин чыгарылышын табуу маселеси изилденет. Мындай маселени башкаруу маселеси катары чечмелөөгө болот, мында чыгарылыш менен бирге бардык убакыт $t\in[0,T]$ боюнча чек ара шарттарынын бирин табуу талап кылынат. Мындан тышкары, жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн чектик тескери маселелерге жана псевдопараболалык тендеменин бир маселеге колдонулушуна арналган.

4.1 бөлүмүндө псевдопараболалык теңдеме үчүн тескери чектик маселенин бир маанилүү чечимдүүлүгү жөнүндө маселе изилденген.

Псевдопараболалык тендеме үчүн жуп $\{u(x,t), f(t)\}$ функцияларынын аныктоо тескери маселесин карап көрөлү:

$$u_t(x,t)=\varepsilon^2 u_{xxt}(x,t)+u_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in D_T, \qquad (1.2.29)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le \pi, \qquad (1.2.30)$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad 0\le t\le T,\qquad u(\pi,t)=f(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (1.2.31)$$

$$u(x_0,t)=h(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (1.2.32)$$

мында $u_0(x), \varphi(t), h(t)-$ берилген функциялар, ал эми $x_0\in(0,\pi)-$ берилген сан, $\varepsilon>0-$кичи параметр.

Мындан ары, (1.2.29) теңдемеси (кийинки бөлүмдөгү теңдемелер дагы) ε параметрин кармагандыктан, (1.2.29) – (1.2.32) тескери маселенин чыгарылышы дагы ушул параметрден көз каранды. Демек, тескери маселенин чыгарылышын дагы тиешелүү түрдө $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ деп белгилейбиз.

1.2.3 – аныктама. Эгерде жуп $u_\varepsilon(x,t)\in C^{(2,1)}(D_T)\cap C(\bar{D}_T),\ f_\varepsilon(t)\in C_0^1[0,T]$ функциялары классикалык мааниде (1.2.29) – (1.2.32) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ жуп функциялары (1.2.29) – (1.2.32) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат.

1.2.5 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$ $h(t)\in C^1([0,T])$жана макулдашуу шарттары $u_0(0)=\varphi(0)=0,\ u_0(\pi)=0,$ $u_0''(0)=0,\ u_0''(\pi)=0,\ \ u_0(x_0)=h(0)$ аткарылсын. Анда каалаган $\varepsilon>0$ үчүн (1.2.29) – (1.2.32) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

4.2 бөлүмүндө псевдопараболалык теңдеме үчүн интегралдык кайра аныктоосу менен тескери чектик маселеси каралган.

Биз Ω_T аймагында биз кичи параметри бар бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи баштапкы-чектик маселесин карайбыз:

$$u_t(x,t)=\varepsilon^2 u_{xxt}(x,t)+u_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in D_T, \qquad (1.2.33)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le \pi, \qquad (1.2.34)$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u(\pi,t)=f(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (1.2.35)$$

мында $\varepsilon > 0$ – кичи параметр.

Тескери маселени карайлы. Мейли (1.2.33) - (1.2.35) баштапкы-чектик маселесинде $u_0(x), \varphi(t)$ функциялары берилсин, ал эми $f(t)$ – белгисиз функция болсун. $f(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, эгерде

$$\int_0^\pi u(x,t)dx = h(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.2.36)$$

мында $h(t)$ – берилген функция,

(1.2.36) шарты **интегралдык кайра аныктоо шарты** деп аталат.

1.2.4 – аныктама. Эгерде $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C(\bar{D}_T),\ f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ жана классикалык мааниде (1.2.33) – (1.2.36) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ жуп функциялары (1.2.33) – (1.2.36) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат.

1.2.6 – теорема. Мейли $u_0(x) \in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C([0,T])$ жана төмөнкү макулдашуу шарттары аткарылсын: $u_0(0) = \varphi(0) = 0, u_0(\pi) = f(0) = 0,\ u_0''(0) = u_0''(\pi) = 0,\quad \int_0^\pi u_0(x)dx = h(0)$. Анда каалагандай $\varepsilon > 0$ саны учун (1.2.33) – (1.2.36) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

4.3 – чү бөлүмдө интервалдын оң жагында берилген функцияны аныктоо тескери маселесинин бир маанилүү чечимдүлүгү жөнүндө маселе изилденди.

Биз D_T аймагында псевдопараболалык теңдеме үчүн төмөнкү шарттардан $u(x,t)$ жана $f(t)$ экилдик функцияларынын табуу тескери маселени карап көрөлү:

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \qquad (1.2.37)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \qquad (1.2.38)$$

$$(\varepsilon u_{xt} + u_x)(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T,\ (\varepsilon u_{xt} + u_x)(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.2.39)$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.2.40)$$

мында $\varepsilon > 0$ – кичи параметр, $u_0(x), \varphi(t)$, $h(t)$ – берилген функциялар.

1.2.5 – аныктама. Эгерде $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C^{(1,1)}(\bar{D}_T)$, $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ жуп функциялары классикалык мааниде (1.2.37) – (1.2.40) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ жуп функциялары (1.2.37) – (1.2.40) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат,

Эскертүү. Макулдашуу шарттары аткарылганда, (1.2.39) чектик шарттарын төмөнкү формада кайра жазууга болот:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t), \; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \mu_2(t), \; 0 \le t \le T, \qquad (1.2.41)$$

мында

$$\mu_1(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \qquad \mu_2(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)} f_\varepsilon(\tau)d\tau. (6)$$

Орун алат

1.2.6 – теорема. Мейли $u_0(x) \in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C^1([0,T])$ жана макулдашуу шарттары орун алсын $u_0'(0) = \varphi(0) = 0$, $u_0'(\pi) = f_\varepsilon(0) = 0$, $u_0(0) = h(0)$, мындан тышкары $u_0''(0) = u_0''(\pi) = 0$. Анда каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн (1.2.37) – (1.2.40) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

4.4 – чү бөлүмдө төмөнкү тескери маселени карайлы: Q_T^+ областында теңдемени жана шарттарды канаттандырган

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \qquad (1.2.42)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,+\infty), \qquad (1.2.43)$$

$$u(0,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.2.44)$$

$$u_x(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (1.2.45)$$

$u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C\overline{Q_T^+})$ жана $f(t) \in C_0^1([0,T])$ экилдик функцияларын табуу керек, мында $\alpha > 0$ – кичи параметр.

1.2.6 – аныктама. Эгерде жуп $u(x,t)\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T^+)\cap C(\bar{Q}_T^+)$ жана $f(t)\in C_0^1[0,T]$ функциялары классикалык мааниде (1.2.42) – (1.2.45) катнаштарын канааттандырса, анда алар (1.2.42) – (1.2.45) тескери маселесинин чыгарылышы деп аталат.

1.2.7 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2_{M_\gamma}[0,+\infty)$, $g(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\bar{Q}_T^+)$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$ жана $g(0,t)=0, u_0(0)=0, u_0^{'}(0)=\varphi(0)=0$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда $\gamma<1-T$ болгондо (1.2.42) – (1.2.45) тескери маселесинин чыгарылышы ∃!.

4.5 – чи бөлүмдө төмөнкү чектик тескери маселени карайлы: мейли $u(x,t)$ функциясы баштапкы -чектик маселени канааттандырсын

$$u_t=u_{xx},\quad (x,t)\in \Pi_T, \tag{1.2.46}$$

$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{1.2.47}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=\varphi(t),\quad 0\le t\le T. \tag{1.2.48}$$

Айталы, $\varphi(t)$ функциясы белгисиз жана (1.2.46) – (1.2.48) маселесинин чыгарылышы жөнүндө төмөнкүдөй кошумча маалымат белгилүү болсо

$$u_x(0,t)=h(t),\ 0\le t\le T, \tag{1.2.49}$$

$\varphi(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, мында $h(t)$ – берилген функция. (1.2.46) – (1.2.49) чектик тескери маселесин Вольтерранын 1-түрдөгү интегралдык теңдемесине алып келуу жолу менен жана А.М.Денисовдун ыкмасын пайдаланып жакындаштырылган чыгарылышы алынган.

4.6 – чы бөлүмдө төмөнкү чектик тескери маселени карайбыз: D_T аймагында төмөнкү теңдемени

$$u_t-u_{xx}=0,\quad 0\le t<T,\quad 0<x<\pi, \tag{1.2.50}$$

баштапкы шартын

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le \pi, \tag{1.2.51}$$

чектик шарттарды

$$u(0,t)=\varphi(t),\, u_x(\pi,t)=f(t), \quad 0\le t\le T. \qquad (1.2.52)$$

канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу баштапкы-чектик маселени карайлы.

Тескери маселени коелу: мейли (1.2.50) – (1.2.52) баштапкы-чектик маселесинде $u_0(x), \varphi(t)$ функциялары берилген, ал эми $f(t)$ белгисиз болсун. $f(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, эгерде

$$u(x_0,t)=h(t), 0\le t\le T, \qquad (1.2.53)$$

мында $h(t)-$ берилген функция, ал эми $x_0\in(0,\pi)-$ берилген сан,.

Бул тескери маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу жөнүндө теорема далилденди.

4.7 – чи бөлүмдө тескери убакыттагы Коши маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу изилденген жана квазиинверсия ыкмасы менен анын регуляризацияланган чыгарылышы аныкталат.

D_T тик бурчтугунда төмөнкү шарртарды канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу талап кылынсын:

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad (x,t)\in D_T \qquad (1.2.54)$$

$$u(x,T)=\varphi(x), \quad 0\le x\le \pi, \qquad (1.2.55)$$

$$u_x(0,t)=0, u_x(\pi,t)=0, \quad 0\le t\le T. \qquad (1.2.56)$$

мында $\varphi(x)$, $f(x,t)-$ берилген функциялар.

(1.2.54) – (1.2.56) маселеси үчүн орун алат

Биз псевдопараболикалык регуляризацияны колдонобуз, ал (1.2.54) – (1.2.56) маселесин төмөнкү маселе менен алмаштыруудан турат:

$$v_{\varepsilon t}-v_{\varepsilon xx}-\varepsilon v_{\varepsilon xxt}=f(x,t), \qquad 0<x<\pi, \quad 0<t<T \qquad (1.2.57)$$

$$v_\varepsilon(x,T)=\varphi(x), \quad 0\le x\le\pi, \qquad (1.2.58)$$

$$v_{\varepsilon x}(0,t)=v_{\varepsilon x}(\pi,t)=0, \quad 0\le t\le T, \qquad (1.2.59)$$

мында $\varepsilon > 0$ – кичи параметр.

1.2.8 – теорема. Мейли $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$, $f(x,t) \in C([0,T];L(0,\pi))$ жана $\varphi'(0) = 0, \varphi'(l) = 0$ макулдашуу шарттары жана

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2T} - \int_0^T e^{k^2 s} f_k(s)ds\right] < +\infty$$

барабарсыздыгы аткарылсын.

Анда (1.2.54) – (1.2.56) маселесинин жалгыз чыгарылышы жашайт жана ал

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2(T-t)} - \int_t^T e^{-k^2(t-s)} f_k(s)ds\right]\cos kx \qquad (1.2.60)$$

формуласы менен берилет.

1.2.9 – теорема. Мейли $\varphi(x)$, $f(x,t)$ функциялары үчүн **1.2.8** –теоремасынын шарттары аткарылсын.Анда (1.2.57) – (1.2.59) маселесинин чыгарылышы ∃! жана

$$\|v_\varepsilon(x,t)\|_{L_2} \le \exp(\frac{2}{\varepsilon}(T-t))\|\varphi(x)\|_{L_2} + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)} - 1\right)\|f\|_{L_2}^2. \qquad (1.2.61)$$

баалоосун канааттандырат.

Биринчи глава боюнча корутунду

Бул главада бизге чейин изилденген псевдопараболалык теңдемелер үчүн ар түрдүү тескери маселелерге талдоо жасалды. Келтирилген талдоолордон көрүнүп тургандай диссертацияда изилденген чектик тескери маселелер мурда каралган эмес.

Бул главанын биринчи бөлүмүндө псевдопараболалык тендемелер үчүн тескери маселелерге кыскача талдоолор жүргүзүлдү. Келтирилген талдоолордон көрүнүп тургандай диссертацияда изилденген чектик тескери маселелер мурда каралган эмес.

Экинчи бөлүмүндө псевдопараболалык тендемелер үчүн диссертацияда каралган тескери маселелердин кыскача мазмуну берилген.

2– ГЛАВА. ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДОЛОГИЯСЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ

2.1. Изилдөөнүн объектилери жана предмети

Изилдөө объектиси. Изилдөөнүн объектиси - бул кичи параметрди кармаган жекече туундулуу бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдемелер. Тактап айтканда бул теңдеме үчүн түз жана тескери маселелер:

3.1 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – төмөнкү биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселе:

$$u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} - u_{xx} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T,$$

мында $\varepsilon > 0-$ кичи параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t), \psi(t)-$ берилген функциялар.

3.2 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – төмөнкү экинчи түрдөгү баштапкы-чектик маселе:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ 0 \le x \le l,$$

$$\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)(0,t) = \varphi(t), \ \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)(l,t) = \psi(t), \ 0 \le t \le T.$$

Мында $\alpha > 0-$ кичи параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t), \psi(t)-$ берилген функциялар.

3.3 түн изилдөө объектиси – төмөнкү жарым октогу баштапкы-чектик маселе:

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0, +\infty),$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T,$$

мында $\alpha > 0 -$кичи параметр.

3.4 түн изилдөө объектиси: Биз D_T областында кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш баштапкы-чектик маселеси

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in D_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \ \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)(\pi,t) = \psi(t), \ 0 \le t \le T.$$

Мында $\varepsilon > 0 -$ кичи параметр.

Төртүнчү главада псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселелерге арналган.

4.1 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – псевдопараболалык теңдеме үчүн $\{u(x,t), f(t)\}$ экилдик функцияларынын аныктоо тескери маселеси:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T,$$

vында $u_0(x), \varphi(t), h(t) -$ берилген функциялар, ал эми $0 < x_0 < \pi -$ берилген сан, $\varepsilon > 0 -$кичи параметр.

4.2 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – псевдопараболалык теңдеме үчүн $\{u(x,t), f(t)\}$ экилдик функцияларынын аныктоо тескери маселеси:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\int_0^\pi u(x,t)dx = h(t), \quad 0 \le t \le T,$$

мында $u_0(x), \varphi(t)$, $h(t) -$берилген функциялар ,$\varepsilon > 0 -$ кичи параметр.

4.3 бөлүмүнүн изилдөө объектиси- псевдопараболалык теңдеме үчүн төмөнкү шарттардан $\{u(x,t), f(t)\}$ экилдик функцияларынын аныктоо тескери маселеси:

$$u_t(x,t)=\varepsilon u_{xxt}(x,t)+u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in D_T,$$
$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le \pi,$$
$$(\varepsilon u_{xt}+u_x)(0,t)=\varphi(t), \quad 0\le t\le T, \ (\varepsilon u_{xt}+u_x)(\pi,t)=f(t), \quad 0\le t\le T,$$
$$u(0,t)=h(t), \quad 0\le t\le T,$$

мында $\varepsilon>0-$ кичи параметр, $u_0(x), \varphi(t)$, $h(t)-$ берилген функциялар.

4.4 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – төмөнкү шарттардан $u(x,t)\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T^+)\cap C\overline{Q}_T^+)$ жана $f(t)\in C_0^1([0,T])$ экилдик функцияларын аныктоо тескери маселеси:

$$Lu(x,t)\equiv u_t(x,t)-\alpha^2 u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=g(x,t), \quad (x,t)\in Q_T^+,$$
$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,+\infty),$$
$$u(0,t)=f(t), \quad 0\le t\le T,$$
$$u_x(0,t)=\varphi(t), \quad 0\le t\le T,$$

мында $\alpha>0-$кичи параметр.

4.5 бөлүмүнүн изилдөө объектиси- төмөнкү шарттардан $u(x,t)$ жана $\varphi(t)$ экилдик функцияларын аныктоо тескери маселеси:

$$u_t=u_{xx}, \quad x\in(0,1), t\in(0,T],$$
$$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1,$$
$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=\varphi(t), \quad 0\le t\le T,$$
$$u_x(0,t)=h(t), \ 0\le t\le T,$$

мында $h(t)$ – берилген функция.

4.6 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – төмөнкү шарттардан $u(x,t)$ жана $f(t)$ экилдик функцияларын аныктоо тескери маселеси:

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in D_T,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad u_x(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x_0,t) = h(t), \; 0 \le t \le T,$$

мында $h(t) -$ берилген функция, ал эми $x_0 \in (0,\pi)$ $-$берилген сан.

4.7 бөлүмүнүн изилдөө объектиси – D_T тик бурчтугунда төмөнкү шарртарды канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу талап кылынсын:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \; (x,t) \in D_T$$

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Мында $\varphi(x)$, $f(x,t) -$ берилген функциялар.

2.2. Изилдөөнүн методдору

2.2.1 Экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемелери

Бизге керек боло турган дагы бир теоремаларды келтиребиз [22].

I. Вольтерра операторунун касиеттери жана даражасы

Мейли $L_2(a,b)$, $C([a,b])$ мейкиндиктериндеги нормалардын аныктамасын жана $L_2(a,b)$-дагы скалярдык көбөйтүндү эске салабыз

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f,g \in L_2(a,b);$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} = \sqrt{\langle f,f\rangle}, \quad f \in L_2(a,b);$$

$$\|f\| = \max_{a\le t\le b} |f(x)|, \quad f \in C([a,b]).$$

$K(x,y)$ үзгүлтүксүз ядросу менен экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин карайбыз

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \quad a \le x \le b. \tag{2.2.1}$$

Белгилөө киргизели:

$$K\varphi \equiv \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.2.2}$$

1-Лемма. Үзгүлтүксүз $K(x,y)$ ядросу бар K интегралдык оператору $L_2(a,b)$ ни $C[a,b]$ га которот (жана демек, $C([a,b])$ ны $C[a,b]$ га жана $L_2(a,b)$ ны $L_2(a,b)$ га которот жана чектелген, мындан тышкары

$$\|K\varphi\|_c \le M\sqrt{b-a}\|\varphi\|, \quad \varphi \in L_2(a,b), \tag{2.2.3}$$

$$\|K\varphi\|_c \le M(b-a)\|\varphi\|_c, \quad \varphi \in C([a,b]), \tag{2.2.4}$$

$$\|K\varphi\| \le M(b-a)\|\varphi\|, \quad \varphi \in L_2(a,b), \tag{2.2.5}$$

мында

$$M=\max_{a\le x,y\le b}|K(x,y)|.$$

Далилдөө. а) Мейли $\varphi\in L_2(a,b)$. Анда φ - (a,b)да абсолюттук интегралдалуучу функция, ал эми $K(x,y)$ядросу $[a,b]\times[a,b]$да үзгүлтүксүз болгондуктан, $(K\varphi(x))$ функциясы дагы $[a,b]$ да үзгүлтүксүз болот. Демек, $(K\varphi(x))$ оператору $L_2(a,b)$ны $C([a,b])$га которот жана Коши-Буняковский барабарсыздыгынан улам, чектелген оператор:

$$\|K\varphi\|_c=\max_{a\le x\le b}|(K\varphi)(x)|=\max_{a\le x\le b}\left|\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy\right|\le$$

$$\le\max_{a\le x\le b}\sqrt{\int_a^x|K(x,y)|^2dy}\sqrt{\int_a^x|\varphi(y)|^2dy}\le M\sqrt{(x-a)}\sqrt{\int_a^b|\varphi(y)|^2dy}\le M\sqrt{b-a}\|\varphi\|.$$

б) Мейли $\varphi\in C([a,b])$. Анда $K(\varphi(x))\in C([a,b])$ жана чектелген:

$$\|K\varphi\|_c=\max_{a\le x\le b}|(K\varphi)(t)|=\max_{a\le x\le b}\int_a^x|K(x,y)||\varphi(y)|dy\le M(x-a)\max_{a\le x\le b}|\varphi(x)|=M(b-a)\|\varphi\|_c.$$

Мындан $(K\varphi(x))$ оператору $C([a,b])$дан $C([a,b])$га которгон оператор катары чектелген.

в) Мейли $\varphi\in L_2(a,b)$. Анда $(K\varphi(x))$оператору $L_2(a,b)$ ны $L_2(a,b)$га которот жана Коши-Буняковский барабарсыздыгы боюнча:

$$|(K\varphi)(x)|\le\left|\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy\right|\le\left(\int_a^x|K(x,y)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_0^x|\varphi(y)|^2dy\right)^{1/2}\le M\sqrt{(b-a)}\|\varphi\|,$$

мындан

$$|(K\varphi)(x)|^2\le M^2(b-a)\|\varphi\|^2.$$

Интегралдап жана андан кийин биз алган акыркы барабарсыздыкты ½ даражасына көтөрүп, акыркы барабарсыздыктан төмөнкү баалоону алабыз:

$$\|(K\varphi)(x)\|\le M(b-a)\|\varphi\|.$$

Ошентип, $(K\varphi(x))$ оператору $L_2(a,b)$ ны $L_2(a,b)$ га которгон оператор катары чектелген.

II. Бул бөлүмдө

$$(K\varphi)(x) \equiv \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy.$$

операторун карайбыз жана анын $r_\delta(K)$. спектралдык радиусун табалы. Аныктама боюнча K операторунун спектрдик радиусу деп

$$r_\delta(K) = \lim_{n\to\infty}\left\|K^n\right\|^{1/n}$$

формуласы менен аныкталган санды айтабыз.

Мейли $M = \max\limits_{a\le x,y\le b}|K(x,y)|$ болсун жана $\{\varphi_n(x)\} \subset C([a,b])$ удаалаштыгын карайлы:

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^x K(x,y)\varphi_1(y)dy,$$

....

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,$$

мында $\varphi(x) \in C[a,b]$. Ошентип, биз баалоолорду ырааттуу түрдө алабыз

$$|\varphi_1(x)| \le \int_a^x |K(x,y)||\varphi(y)|dy \le M(x-a)\max_{a\le x\le b}|\varphi(x)| = M(x-a) = \|\varphi\|,$$

$$|\varphi_2(x)| \le M\int_a^x M(y-a)dy\|\varphi\| = M^2\frac{(x-a)^2}{2}\|\varphi\|,$$

– –

$$|\varphi_n(x)| \le M\int_a^x M^{n-1}\frac{(y-a)^{n-1}}{(n-1)!}dy\|\varphi\| = M^n\frac{(x-a)^n}{n!}\|\varphi\|,$$

– –

$\varphi_n(x) = (K^n\varphi(x)),$ болгондуктан, акыркы барабарсыздыктан биз төмөнкү баалоону алабыз:

$$\left\|K^n\varphi\right\| \le \frac{M^n(x-a)^n}{n!}\left\|\varphi\right\| \le \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\left\|\varphi\right\|,$$

б.а.

$$\left\|K^n\right\| \le \frac{M^n(b-a)^n}{n!}.$$

Демек,

$$r_\delta(K) = \lim_{n\to\infty}\left\|K^n\right\|^{1/n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{M(b-a)}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \quad (\sqrt[n]{n!} \to \infty \quad при \quad n \to \infty).$$

Ошентип, $\lambda = 0$ K операторунун жалгыз спектринин чекити болуп саналат.Мындан биз $\lambda \ne 0$ үчүн $\lambda\varphi - K\varphi = f$ теңдемесинин жалгыз чыгарылышы жашайт, аны Неймандын катарына ажыратуу жолу менен алууга болот.

III. Экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема

Экинчи түрдөгү сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемесин карайлы

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \quad c \le x \le d, \quad a \in [c,d] \qquad (2.2.6)$$

мында $\varphi(x)$ – белгисиз үзгүлтүксүз функция; $f(x)$ – $[c,d]$ сегментинде берилген үзгүлтүксүз функция; λ – чыныгы параметр; $K(x,y)$ интегралдык теңдеменин ядросу $[c,d]\times[c,d]$ – квадратта үзгүлтүксүз берилген функция.

(2.2.6) интегралдык теңдемеси менен бирге тиешелүү интегралдык операторду карайбыз

$$(K\varphi)(x) = \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy, \quad c \le x \le d, \quad a \in [c,d],$$

үзгүлтүксүз функциялардын $C[c,d]$ мейкиндигинде аныкталган жана андагы норма менен:

$$\|\varphi\| = \max_{c\le x\le d} |\varphi(x)|.$$

Мейли $M = \max_{c\le x,y\le d} |K(x,y)|$. Анда

$$\|K\varphi\| = \max_{c\le x\le d} \left| \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \right| \le |x-a| \cdot M \cdot \|\varphi\| \qquad (2.2.7)$$

Келгиле, адегенде жалпыланган кысып чагылтуу принцибин келтирели.

2.2.1 – *аныктама*. Мейли (X, ρ) – метрикалык мейкиндик болсун.

Эгерде $\rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x,y)$, барабарсыздыгы $0 < \alpha < 1$ үчүн орун алса, анда $A: X \to X$ чагылтуусу кысуучу чагылтуу деп аталат.

2.2.2 – *аныктама*. Эгерде $x_0 \in X$ чекити үчүн $Ax_0 = x_0$ барабардыгы орун алса, анда ал чекит A чагылтуусунун кыймылсыз чекити деп аталат. Мындан каалагандай кысуучу чагылтуу үзгүлтүксүз чагылтуу болот деген келип чыгат.

2.2.1 – Теорема (Кысып чагылтуу принциби). Мейли X – толук метрикалык мейкиндик жана $A: X \to X$ чагылтуусу кысуучу болсун. Анда A чагылтуусу кыймылсыз чекитке ээ болот жана ал жалгыз.

2.2.2 – Теорема (***Жалпыланган кысып чагылтуу принциби***). Эгерде толук метрикалык $X = D(A)$ мейкиндигине таасир этүүчү A операторунун кандайдыр бир A^m даражасы кысып чагылтууучу оператор болсо, анда

$$x = Ax \qquad (2.2.8)$$

теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ жана бул чыгарылышты удаалаш жакындатуу ыкмасы менен табууга болот.

Чынында,

$$x = A^m x \qquad (2.2.9)$$

теңдемеси кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз чыгарылышка ээ, биз аны y менен белгилейбиз.

(2.2.9) теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгынан улам $y = Ay,$ б.а. (2.2.6) теңдеменин y чыгарылышы жашашын далилдедик. Мейли (2.2.6) теңдеменин кандайдыр бир чыгарылышын x деп алалы. Анда $x = A^m x,$ демек, $x = y,$ б.а. (2.2.6) теңдеменсиин чыгарылышы жалгыз .

A^m оператору кысып чагылтуучу оператор болгондуктан (2.2.6) теңдемесинин чыгарылышын удалаш жакындатуу ыкмасы менен табууга болот.

2.2.2 − Теорема [22]. (***Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы***). (2.2.6) интегралдык теңдеменин оң жагы $f(x)$ жана ядросу $K(x, y)$ алардын аныктоо областында үзгүлтүксүз болсун. Анда (2.2.6) теңдемеси $[c, d]$ сегментинде үзгүлтүксүз жалгыз чыгарылышка ээ.

Далилдөө. $C[c, d]$ мейкиндигинде аракеттенген ү

$$(A\varphi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy + f(x), \quad c \le x \le d, \quad a \in [c, d], \quad (2.2.10)$$

опероторун карайлы. Анда (2.2.6) теңдемени $\varphi = A\varphi$ түрүндө жазууга болот. λ параметринин кандайдыр бир фиксирленген мааниси үчүн A операторунун кандайдыр бир даражасы кысып чагылтуучу оператор экенин көрсөтөлү. Ошондон жана 2.2.1− теоремадан 2.2.3 − теоремасынын ырастоосу келип чыгат.

Мейли φ жана $\psi -$ $C[c, d]$ мейкиндигинин кандайдыр бир элементтери болсун. Анда

$$\begin{aligned}
&(A\varphi)(x) - (A\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)[\varphi(y) - \psi(y)]dy, \\
&(A^2\varphi)(x) - (A^2\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)[(A\varphi)(y) - (A\psi)(y)]dy, \qquad (2.2.11 \\
&-------------------------------- \\
&(A^m\varphi)(x) - (A^m\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\left[(A^{m-1}\varphi)(y) - (A^{m-1}\psi)(y)\right]dy.
\end{aligned}$$

Мейли $\varphi(x) - \psi(x) = \sigma$, анда $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \sigma$.

$K(x, y)$ ядросу жабык чектелген аймакта үзгүлтүксүз болгондуктан, ал бул аймакта чектелген болот: $|K(x, y)| \le M$.

(2.2.7) барабарсыздыгы боюнча биз төмөнкүнү алабыз:

$$
\begin{aligned}
&|(A\varphi)(x) - (A\psi)(x)| \le |\lambda| M\sigma |x-a| \\
&|(A^2\varphi)(x) - (A^2\psi)(x)| \le |\lambda|^2 M^2 \sigma \frac{|x-a|^2}{2!} \\
&------------------------ \\
&|(A^m\varphi)(x) - (A^m\psi)(x)| \le |\lambda|^m M^m \sigma \frac{|x-a|^m}{m!}
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

$A^m\varphi$ менен $A^m\psi$ нун ортосундагы аралыкты $\rho(A^m\varphi, A^m\psi)$ менен белгилейли, анда (2.2.12) барабарсыздыктарынан төмөнкү келип чыгат:

$$
\rho(A^m\varphi, A^m\psi) \le |\lambda|^m M^m \sigma \frac{(d-c)^m}{m!}. \tag{2.2.13}
$$

Ал эми

$$
\left(|\lambda|^{m+1} M^{m+1} \sigma \frac{(d-c)^{m+1}}{(m+1)!}\right) : \left(|\lambda|^m M^m \sigma \frac{(d-c)^m}{(m)!}\right)
$$

катнашы $m \to \infty$ нөлгө умтулса, анда

$$
|\lambda|^m M^m \sigma \frac{(d-c)^m}{(m)!}
$$

туюнтмасы дагы каалагандай фиксирленген λ үчүн $m \to \infty$да нөлгө умтулат. Ал эми бул кандайдыр бир фиксирленген λ нын жана $m(\lambda)$ жетиштүү чоң, маанилери үчүн A^m оператору кысып чагылтуучу оператор болот дегенди билдирет.

(2.2.6) теңдемесинин чыгарылышын удаалаштыкты жакындаштыруу ыкмасы менен табабыз, алгачкы жакындаштыруу катары $\varphi_0(x) = f(x)$ кабыл алабыз. Анда

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,y) f(y)dy,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_1(y)dy = f(x) + \lambda\int_a^x \left[K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y)\right] f(y)dy,$$

мынды

$$K_1(x,y) = K_2(x,y);$$

$$K_2(x,y) = \int_y^x K(x,\tau) K_1(\tau,y)d\tau$$

Бул жерде интегралдоонун тартибин өзгөртүү үчүн Дирихле формуласын колдондук:

$$\int_a^b \left[\int_a^x Q(x,s)ds\right]dx = \int_a^b \left\{\int_s^b Q(x,s)dx\right\}ds.$$

Аныктама боюнча $K(x,y)$ ядросунун m- чи итерациясы деп

$$K_m(x,y) = \int_y^x K(x,\tau) K_{m-1}(\tau,y)dy. \qquad (2.2.14)$$

ядросун айтабыз.

Толук математикалык индукция ыкмасы менен

$$\varphi_m(x) = f(x) + \lambda\int_a^x \left[K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{m-1}K_m(x,y)\right] f(y)dy. \qquad (2.2.15)$$

муну оңой эле далилдесек болот.

2.2.2 жана 2.2.3 – теоремаларынын негизинде $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \varphi(x)$ теңдемесинин чыгарылышы болуп саналат.

Ошондуктан

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \lim_{m\to\infty}\int_a^x \left[K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{m-1}K_m(x,y)\right] f(y)dy. \quad (2.2.16)$$

Биз азыр төмөнкү функционалдык катарды изилдейбиз

$$K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{m-1}K_m(x,y) + \ldots\ . \qquad (2.2.17)$$

Ал эми

$$|K_1(x,y)| = |K(x,y)| \le M,$$

$$|K_2(x,y)| = \left| \int_y^x K(x,\tau) K_1(\tau,y) d\tau \right| \le M^2 |x-y|$$

болгондуктан, биз математикалык индукция ыкмасы менен биз төмөнкү баалоону далилдей алабыз

$$|K_m(x,y)| \le M^m \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} \le M^m \frac{(d-c)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Даламбердин белгиси аркылуу,биз λ параметринин каалаган мааниси үчүн

$$M + |\lambda| M^2 \frac{(d-c)}{1!} + \ldots + |\lambda|^{m-1} M^m \frac{(d-c)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots$$

сандык катар жыйналарына ынанабыз.

Ошол үчүн, λ нын каалагандай фиксирленген мааниси үчүн (2.2.17) функционалдык катары $c \le x \le y \le d$ жана $a \le y \le x \le d$ аймактарында анын $R(x,y,\lambda)$ суммасына бир калыпта жана абсолюттук жыйналат:

$$R(x,y,\lambda) = K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{m-1} K_m(x,y) + \ldots \qquad (2.2.18)$$

$R(x,y,\lambda)$ функциясы (2.2.15) интегралдык теңдемесинин резольвентасы деп аталат. $R(x,y,\lambda)$ резольвентасы (x,y,λ) чекити боюнча үзгүлтүксүз функциясы болот жана x, y тин фиксирленген маанилери үчүн бүт комплекстүү тегиздиктеги λ параметринен аналитикалык функция же ушул параметрден бүтүн функциясы болуп саналат.

Интегралдык белгинин астынан пределге өтүү боюнча белгилүү теореманын негизинде (2.2.16) формуласын төмөнкүчө жазууга болот:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,y,\lambda) f(y) dy \quad . \qquad (2.2.19)$$

(2.2.16) барабардыгынан

$$R(x,y,\lambda) - K(x,y) = \lambda \int_y^x K(x,\tau) [K_1(\tau,y) + \lambda K_2(\tau,y) + \ldots] d\tau$$

туюнтмасын алабыз.

Ошентип, $R(x,y,\lambda)$ резольвентасы төмөнкү теңдемени канаттандырат:

$$R(x,y,\lambda)-K(x,y)=\lambda\int_{y}^{x}K(x,\tau)R(\tau,y,\lambda)d\tau\,, \qquad (2.2.20)$$

(2.2.20) теңдемеси резольвентанын интегралдык теңдемеси деп аталат.

Экинчи глава боюнча корутунду

Бул главада диссертациялык изилдөөнүн обьектилери жана предмети келтирилди. Тактап айтканда үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселелер изилденет жана бул тескери маселелердин бир маанилүү чыгарымдуулугунун жетиштүү шарттары аныкталат, жана жалпыланган кысып чагылтуу принцибинин негизинде чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы далилденет. Псевдопараболалык теңдеме үчүн ар бир чектик тескери маселелерди чыгаруу үчүн төмөнкү алгоритм колдонулат:

1-кадам. Псевдопараболалык теңдеме үчүн тиешелүү түз маселеси изилденип, анын айкын чыгарылыштары тургузулат.

2-кадам. Кошумча шартты (изделүүчү функциянын ички чекиттеги маанисин же интегралдык кайра аныктоо шартын) колдонуп, тескери маселени Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине же теңдемелер системасына алынып келинет;

3-кадам. Алынган Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеге же теңдемелер системасына кысып чагылтуу принцибин колдонуп теңдеменин же системанын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденет жана удаалаш жакындатуу ыкмасынын жардамында тескери маселенин чыгарылышы тургузулат.

3 – ГЛАВА . ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ТҮЗ МАСЕЛЕЛЕР

Бул главада биз кичи параметри бар үчүнчү даражадагы псевдопараболалык теңдеме үчүн баштапкы-чектик маселелерин карайбыз.

3.1. Кичи параметрлүү бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы- чектик маселе

Бул бөлүмдүн максаты – кичи параметри бар бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы – чектик маселесин изилдөө жана кичинекей параметрдин таасирин баалоо.

Төмөнкү шарттардан белгилүү функциялар боюнча $u(x,t)\in C(\bar{\Pi}_T)\cap C^{(2,1)}(\Pi_T)$ функциясын табуу маселесин карап көрөлү:

$$u_t-\varepsilon^2 u_{xxt}-u_{xx}=0,\quad 0<t\le T,\quad 0<x<1, \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{3.1.2}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u(1,t)=\psi(t),\quad 0\le t\le T, \tag{3.1.3}$$

мында $\varepsilon>0$ – кичи параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t),\psi(t)$- берилген функциялар. (3.1.1)-(3.1.4) маселесин түз маселе деп айтабыз.

Берилген функциялар үчүн төмөнкү жылмакай жана макулдашуу шарттары аткарылсын:

$$u_0(x)\in C^2[0,1],\varphi(t),\psi(t)\in C^1[0,T], \tag{3.1.4}$$

$$u_0(0)=\varphi(0)=0,\ u_0(1)=\psi(0)=0. \tag{3.1.5}$$

[1,2] сыяктуу эле,

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+w(x,t), \tag{3.1.6}$$

өзгөртүүсүн киргизебиз, мында $v_\varepsilon(x,t)$- жаңы белгисиз функция, ал эми

$$w(x,t)=\varphi(t)+x\big(\psi(t)-\varphi(t)\big),$$

Анда (3.1.1) – (3.1.3) маселесин төмөнкү маселеге келтиребиз:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Pi_T, \tag{3.1.7}$$

$$v_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \tag{3.1.8}$$

$$v_\varepsilon(0,t)=0,\ v_\varepsilon(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \tag{3.1.9}$$

Жогорудагы ой жүгүртүүдөн келип чыгат (3.1.1) – (3.1.3) маселесинин бир маанилуу чыгарылышка ээ экендигин далилдөө үчүн (3.1.7) – (3.1.9) баштапкы-чектик маселенин бир маанилүү чыгарылышка ээ экендигин жөнүндөгү теореманы далилдөө жетиштүү.

3.1.1 – теорема. Мейли берилген функциялар (3.1.4), (3.1.5) шарттарын канааттандырсын. Анда каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн (3.1.7) – (3.1.9) маселенин чыгарылышы $\exists!$ жана аны төмөнкү түрдө көрсөтүүгө болот

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t)-\varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x)-\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t\left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\Big[(-1)^n\psi(\tau)-\varphi(\tau)\Big]\right)d\tau\sin(n\pi x),\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

мында

$$u_{0n}=2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx. \tag{3.1.11}$$

Далилдөө. Биз (3.1.7) – (3.1.9) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз: $v_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon^1(x,t)+v_\varepsilon^2(x,t)$.

$$\frac{\partial v_\varepsilon^1}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon^1}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon^1}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in \Pi_T, \tag{3.1.12}$$

$$v_\varepsilon^1(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \tag{3.1.13}$$

$$v_\varepsilon^1(0,t)=0,\ v_\varepsilon^1(1,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{3.1.14}$$

$$\frac{\partial v_\varepsilon^2}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon^2}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon^2}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{3.1.15}$$

$$v_\varepsilon^1(x,0)=0,\ 0\le x\le 1, \tag{3.1.16}$$

$$v_\varepsilon^1(0,t)=0,\ v_\varepsilon^1(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \tag{3.1.17}$$

[3] ишинин натыйжаларынан белгилүү болгондой, (3.1.12) – (3.1.14) маселенин чыгарылышы

$$v_\varepsilon^1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x), \qquad (3.1.18)$$

түрүнө ээ, ал эми $\lambda_n=n^2\pi^2,\quad X_n(x)=\sin n\pi x,\ n\in\mathrm{N}$, тиешелүү Штурм-Лиувилл маселесинин өздүк маанилери жана өздүк функциялары:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(1)=0.$$

Фурьенин ыкмасына ылайык (3.1.15) – (3.1.17) маселесинин чыгарылышы

$$v_\varepsilon^2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_{\varepsilon n}^2(t)\sin(n\pi x). \qquad (3.1.19)$$

түрүндө изделет.

Анда $v_{\varepsilon n}^2(t)$ функциясын аныктоо үчүн системаны алабыз:

$$\begin{cases}\dfrac{dv_{\varepsilon n}^2(t)}{dt}+\dfrac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}v_{\varepsilon n}^2(t)=\dfrac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2}f_n(t),\\ v_{\varepsilon n}^2(0)=0,\end{cases} \qquad (3.1.20)$$

мында

$$\begin{aligned}f_n(t)&=2\int_0^1\left[(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t)\right]\sin(n\pi x)dx=\\&=-2(-1)^n\left(n\pi\right)^{-1}\psi'(t)+2\left(n\pi\right)^{-1}\varphi'(t)\end{aligned} \qquad (3.1.21)$$

(3.1.20) маселесинин чечими:

$$v_{\varepsilon n}^2(t)=\frac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_n(\tau)d\tau. \qquad (3.1.22)$$

(3.1.22) ни (3.1.19) ка коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$v_\varepsilon^2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_n(\tau)d\tau\sin(n\pi x).$$

Мындан, (3.1.21) ди эске алуу менен биз алабыз:

$$v_\varepsilon^2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t)-\varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t\left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\Big[(-1)^n\psi(\tau)-\varphi(\tau)\Big]\right)d\tau\sin(n\pi x) \tag{3.1.23}$$

(3.1.18) жана (3.1.23) суммалап, (3.1.10) формуланы алабыз. (3.1.10) формуласын негиздөөгө өтөлү. Алгач $v_\varepsilon(x,t)\in C(\overline{\Pi}_T)$ жана (3.1.10) катары $\overline{\Pi}_T$ да үзгүлтүксүз функцияны берерин көрсөтөбүз. $v_{\varepsilon n}(x,t)$ функциясын баалайлы.

$u_0(x)$ функциясына коюлган шарттардан

$$|u_{0n}|\le\frac{const}{n^2}$$

баалоосу келип чыгат.

Анткени $t>t_0>0$ үчүн

$$0<\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\le e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le|u_{0n}|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\le|u_{0n}|\le\frac{const}{n^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t)-\varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x)\right|\le\left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\right|\big|\psi(t)+\varphi(t)\big|\le$$
$$\le const\left[\frac{1}{((1+(\varepsilon n\pi)^2))^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}\right],$$

$$\left|\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t\left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\Big[(-1)^n\psi(\tau)-\varphi(\tau)\Big]\right)d\tau\sin(n\pi x)\right|\le$$
$$\le const\left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\right|\left(1-\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\right)\le\left[\frac{1}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}\right],$$

анда (3.1.10) катары $t\ge 0$ болгондо бир калыпта жана абсолюттук жыйналат. Демек, (3.1.10) катары менен аныкталган $v_{\varepsilon n}(x,t)$ функциясы $\overline{\Omega}_T$ аймагында үзгүлтүксүз жана баштапкы жана чектик шарттарды канааттандырат.

$v_{\varepsilon n}(x,t)$ функциясы Π_T областындагы (3.1.7) теңдемени канааттандырарын көрсөтүү калды. Бул үчүн төмөнкү катарлардын бир калыпта жыйнааларын көрсөтүү жетиштүү:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}.$$

Анткени

$$\left|\frac{\partial v_{\varepsilon n}^1}{\partial t}\right|=\left|-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le|u_{0n}|\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}}\le\frac{C}{n^2}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}^1}{\partial x^2}\right|=\left|-(n\pi)^2u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le(n\pi)^2|u_{0n}|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t_0\right)\le$$

$$\le C\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}^1}{\partial x^2\partial t}\right|=\left|(n\pi)^2\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le$$

$$\le(n\pi)^2|u_{0n}|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t_0\right)\le C\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}}$$

экендигин эске алып жана $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларына коюлган шарттардан

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{\varepsilon n}^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}^2}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}^2}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}^2}{\partial x^2\partial t}$$

катарларынын жыйналары келип чыгат.

Мындан жана жогорудагы баалоолордон $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}$ катарлары тиешелүү түрдө $\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t},\ \frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2}$ жана $\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}$ функцияларына бир калыпта жыйналары келип чыгат. 3.1.1 – теорема далилденди.

3.1.1 – натыйжа. (3.1.7) – (3.1.9) маселенин чыгарылышын Грин функциясы аркылуу төмөнкү формада көрсөтүүгө болот:

$$v_\varepsilon(x,t)=\int_0^1 G_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G_1(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau,\quad(3.1.24)$$

мында

$$G_1(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi),$$

$$G_2(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi).$$

3.1.1 – эскертүү. (3.1.24) төн $\varepsilon\to+0$ пределге өтүп, төмөнкү баштапкы-чектик маселенин чыгарылышын алабыз:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Pi_T,$$

$$v(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1,$$

$$v(0,t)=0,\ v(1,t)=0,\ 0\le t\le T\ .$$

Чындыгында,

$$\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon(x,t)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^t\int_0^1 G_1(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau,$$

мында $G(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-(n\pi)^2t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi)$.

Мисал. Төмөнкү маселенин чыгарылышын тапкыла жана алынган чыгарылыш $\varepsilon\to+0$ тиешелүү параболалык тендеме үчүн баштапкы чектик маселенин чыгарылышына умтулаарын көрсөтөлү:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in\Pi_T, \qquad (3.1.25)$$

$$u_\varepsilon(x,0)=15\sin 5\pi x,\ 0\le x\le 1, \qquad (3.1.26)$$

$$u_\varepsilon(0,t)=0,\ u_\varepsilon(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \qquad (3.1.27)$$

(3.1.18) формуласына ылайык, (3.125) – (3.1.27) маселесинин чыгарылышы

$$u_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x).$$

Мында фурье коэффициенти u_{0n} ди эсептейли:

$$u_{0n} = 2\int_0^1 u_0(s)\sin n\pi s ds = 2\cdot 15\int_0^1 \sin 5\pi s \sin n\pi s ds =$$

$$= 15\int_0^1 \left[\cos(5+n)\pi s - \cos(5-n)\pi s\right] ds = 0, \quad n \neq 5,$$

$$u_{05} = 2\cdot 15\int_0^1 \sin 5\pi s \sin 5\pi s ds = 15\int_0^1 (1 - cos 10\pi s) ds = 15.$$

Ошентип,

$$u_\varepsilon(x,t) = 15\exp\left(-\frac{25\pi^2}{1+25\varepsilon^2\pi^2}t\right)\sin(5\pi x)$$

чыгарылышыни алабыз.

Ал эми $\varepsilon = 0$ болгон учурда тиешелүү параболалык тендеме үчүн баштапкы чектик маселенин чыгарылышы

$$u(x,t) = 15\exp\left(-25\pi^2 t\right)\sin(5\pi x).$$

формуласы менен берилет.Эми $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = u(x,t)$ көрсөтөлү.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = 15\lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left(-\frac{25\pi^2}{1+25\varepsilon^2\pi^2}t\right)\sin(5\pi x) =$$
$$= 15\exp\left(-25\pi^2 t\right)\sin(5\pi x) = u(x,t).$$

3.2. КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ БАШТАПКЫ-ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМДҮҮЛҮГҮ ЖӨНҮНДӨ

Биз Ω_T аймагында кичинекей параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы-чектик маселесин карайлы

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{3.2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \ \ 0\le x\le l, \tag{3.2.2}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)=\varphi(t), \ \left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(l,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \tag{3.2.3}$$

мында $\alpha>0-$ кичи параметр.

(3.2.1) – (3.2.3) маселеси - параболалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы- чектик маселенин сингулярдуу козголуусу болот:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{3.2.4}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \ \ 0\le x\le l, \tag{3.2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\varphi(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \tag{3.2.6}$$

3.2.1 – теорема. Эгерде $u_0(x)\in C^2[0,l], \varphi(t)\in C^1[0,T], \psi(t)\in C^1[0,T]$ жана $u_0(0)=\mu(0), \quad u_0^{'}(0)=\varphi(0), \ u_0^{'}(l)=\psi(0)$ макулдашылган шарттар аткарылса, анда (3.2.1) – (3.2.3) баштапкы-чектик маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

Далилдөө. Макулдашуу шарттар орун алганда, (3.2.3) чектик шарттарын төмөнкүчө кайра жазууга болот:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu_1(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\mu_2(t), \ 0\le t\le T, \tag{3.2.7}$$

мында

$$\mu_1(t)=\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau,\quad \mu_2(t)=\psi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau.$$

(3.2.1) – (3.2.3) маселенин сызыктуулугунан улам анын чыгарылышын төмөнкү формада издөөгө болот.

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{3.2.8}$$

мында v- жаңы белгисиз функция, ал эми

$$w(x,t)=u_0(x)+x\left[\mu_1(t)-\mu_1(0)\right]+\frac{x^2}{2l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)\right].$$

Анда $v(x,t)$ функциясы бир тектүү чектик шарттарды

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=0,\ 0\le t\le T,$$

жана бир тектүү баштапкы шартты

$$v(x,0)=u_0(x)-u_0(x)-x\left[\mu_1(0)-\mu_1(0)\right]-\frac{x^2}{2l}[\mu_2(0)-\mu_1(0)+\mu_1(0)-\mu_2(0)]=0$$

канааттандырат.

(3.2.1) теңдемеси α кичи параметрин кармагандыктан, (3.2.1) – (3.2.3) маселенин чыгарылышы ушул параметрге көз каранды жана мындан ары $u_\alpha(x,t)$ менен белгилейбиз.

Ошентип, баштапкы (3.2.1) – (3.2.3) маселеси үчүн чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теореманы далилдөө үчүн, $u_\alpha(x,t)$ функциясына карата төмөнкү баштапкы-чектик маселенин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгын далилдөө жетиштүү:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}=f_\alpha(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{3.2.9}$$

$$u_\alpha(x,0)=0,\quad 0\le x\le l, \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{3.2.11}$$

мында

$$f_\alpha(x,t)=u_0''(x)+\frac{1}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)\right]-x\mu_1'(t)-\left(\frac{x^2}{2l}+\frac{\alpha}{l}\right)\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right].$$

(3.2.9) – (3.2.11) маселесине туура келген Штурм-Лиувиллдин маселесин карап көрөлү

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X'(0)=X'(l)=0.$$

Бул маселенин өздүк маанилери жана өздүк функциялары төмөнкү формага ээ

$$\lambda_0=0,\ X_0(x)=1,\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\ n\in\mathrm{N}.$$

(3.2.9) – (3.2.11) маселенин чыгарылышын $X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad n=0,1,...,...$ өздүк функциялар системасы боюнча катар түрүндө издейбиз:

$$u_\alpha(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{\alpha n}(t)\cos\frac{n\pi}{l}x, \tag{3.2.12}$$

мында $T_{\alpha n}(t)$ – азырынча белгисиз функциялар.

Андан ары, $f_\alpha(x,t)$ функциясын $X_n(x)$ системасы боюнча ар бир $t\in[0,T]$ үчүн $[0,l]$ сегменттинде Фурье катарына ажыратабыз:

$$f(x,t)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3.2.13}$$

мында $f_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)dx,\quad f_{\alpha n}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx.$

(3.2.12), (2.2.13) катарларын (3.2.9) га коюп, алынган туюнтмаларды өзгөртүп,

$$T_{\alpha 0}'(t)=\frac{f_{\alpha 0}(t)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\alpha(\frac{n\pi}{l})^2\right)T_{\alpha n}'(t)+(\frac{n\pi}{l})^2T_{\alpha n}(t)-f_{\alpha n}(t)\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x=0$$

системасын алабыз.

Ошентип, $T_{\alpha n}(t)$ функциясын аныктоо үчүн (3.2.10) баштапкы шартын эске алып, төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} T'_{\alpha 0}(t)=\dfrac{f_{\alpha 0}(t)}{2}, \\ T_{\alpha 0}(0)=0, \end{cases} \tag{3.2.14}$$

$$\begin{cases} T'_{\alpha n}(t)+\dfrac{l^2}{\left(l^2+\alpha(n\pi)^2\right)}\dfrac{(n\pi)^2}{l^2}T_{\alpha n}(t)=\dfrac{l^2}{\left(l^2+\alpha(n\pi)^2\right)}f_{\alpha n}(t), \\ T_{\alpha n}(0)=0. \end{cases} \tag{3.2.15}$$

(3.2.14) жана (3.2.15) маселелерди чыгарып, биз табабыз:

$$T_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{2}\int_0^t f_{\alpha 0}(\tau)d\tau,$$

$$T_{\alpha n}(t)=\frac{l^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_{\alpha n}(\tau)d\tau. \tag{3.2.16}$$

Эми Фурьенин коэффициенттерин табалы. (3.2.8), (3.2.9) тарды эске алып,

$$f_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)dx=\frac{1}{l}\left(\psi(0)-\varphi(0)\right)(1-e^{-\frac{1}{\alpha}t})-\frac{1}{\alpha l}\int_0^t\left(\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}d\tau-$$
$$-\frac{2}{\alpha l}\left(\varphi(t)-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau-\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}\right)+\left(\frac{l}{6}+\frac{\alpha}{l}\right)\times$$
$$\times\tfrac{1}{\alpha}\left(\left(\psi(0)-\varphi(0)\right)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\left[\psi(t)-\varphi(t)\right]+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\left[\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau\right),$$

(3.2.17)

функцияларын алабыз

$$f_{\alpha n}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l u''_0(x)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx+$$
$$+\frac{2}{l^2}\int_0^l\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)\right]\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx+\frac{2}{l}\mu'_1(t)\int_0^l x\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx$$
$$-\frac{2}{l}\left[\mu'_2(t)-\mu'_1(t)\right]\int_0^l\left(\frac{x^2}{2l}+\frac{\alpha}{l}\right)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx=$$

$$=\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 u_{0n}+\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2(-1)^n\left[\psi(t)-\frac{1}{\alpha}\psi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\left[\varphi(t)-\frac{1}{\alpha}\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right], \tag{3.2.18}$$

мында

$$u_{0n}=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

(3.2.16) туюнтмаларын (3.2.12) ге коюп, (3.2.9) – (3.2.11) маселесинин формалдуу чыгарылышын алабыз:

$$u_\alpha(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t f_{\alpha 0}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{l^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_{\alpha n}(\tau)d\tau\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x, \tag{3.2.19}$$

мында Фурьенин коэффициенттери $f_{\alpha 0}(t),\ f_{\alpha n}(t), n=1,2,...,...$ (3.2.17), (3.2.18) формулалары боюнча эсептелет.

Теореманын шарттарынан (3.2.19) катарлардын жыйналуусу, ошондой эле тиешелүү $u_{\alpha t}(x,t), u_{\alpha xx}(x,t), u_{\alpha xxt}(x,t)$ туундуларынын жыйналуулары келип чыгат.

Эми (3.2.4) – (3.2.6) баштапкы-чектик маселесинин чыгарылышын табалы. (3.2.4) – (3.2.6) маселеси үчүн төмөнкү теорема орун алат.

3.2.2 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2[0,l],\ \varphi(t)\in C^1[0,T],\ \psi(t)\in C^1[0,T]$, мындан тышкары төмөнкү макулдашылган шарттар аткарылсын $u_0(0)=\mu(0),\quad u_0'(0)=\varphi(0),\quad u_0'(l)=\psi(0)$. Анда (3.2.4) – (3.2.6) маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

Мындан тышкары, (3.2.1) – (3.2.3) козголгон маселесинин чыгарылышы $\alpha\to 0$ (3.2.4) – (3.2.6) маселенин чыгарылышына жыйналат,б.а. $\|u_\alpha(x,t)-u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega}_T)}\underset{\alpha\to 0}{\to}0$.

Далилдөө. Алгач (3.2.4) – (3.2.6) маселесинин бир тектүү чектик шарттары бар маселеге келтиребиз. Ал үчүн өзгөртүү киргизебиз

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{3.2.20}$$

бул жерде $v(x,t)$ – жаңы белгисиз функция, ал эми

$$w(x,t) = u_0(x) + x\big[\varphi(t) - \varphi(0)\big] + \frac{x^2}{2l}\big[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\big].$$

Анда белгисиз $v(x,t)$ функциясы үчүн төмөнкү маселени алабыз

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{3.2.21}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{3.2.22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{3.2.23}$$

мында

$$f(x,t) = u_0''(x) + \frac{1}{l}\big[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\big] - x\varphi'(t) - \frac{x^2}{2l}\big[\psi'(t) - \varphi(t)\big].$$

[8] ишинен белгилүү болгондой, бул баштапкы–чектик маселенин чыгарылышы төмөнкү формага ээ

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2}(t-\tau)\right) f_n(\tau)d\tau\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{3.2.24}$$

Бул жерде

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x,t)dx = \frac{1}{l}\big(\psi(t) - \varphi(t)\big) - \frac{l^2}{3}\varphi'(t) - \frac{l^2}{2}\psi'(t),$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l u_0''(x)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx +$$

$$+\frac{2}{l^2}\int_0^l \big[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\big]\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx + \frac{2}{l}\varphi'(t)\int_0^l x\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx$$

$$-\frac{2}{l}\big[\psi'(t) - \varphi'(t)\big]\int_0^l \frac{x^2}{2l}\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx = \frac{2}{l}\big((-1)^n u_0'(l) - u_0'(0)\big) - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 u_{0n} -$$

$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \varphi'(t) - \frac{(-1)^n l}{(n\pi)^2}\big[\psi'(t) + \varphi'(t)\big].$$

(3.2.19) ден $\alpha \to 0$ пределге өтүп, (3.2.21) – (3.2.23) маселенин чыгарылышын алабыз. Мындан 3.2.2 теореманын корутундусу келип чыгат. 3.2.2 – теорема далилденди.

Мисал. Төмөнкү маселенин чыгарылышын тапкыла жана алынган чыгарылыш $\alpha \to +0$ тиешелүү параболалык тендеме үчүн баштапкы чектик маселенин чыгарылышына умтулаарын көрсөтөлү:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \qquad (3.2.25)$$

$$u_\alpha(x,0) = 16\cos 8\pi x, \ 0 \le x \le 1, \qquad (3.2.26)$$

$$(\alpha u_{\alpha xt} + u_{\alpha x})(0,t) = 0, \ (\alpha u_{\alpha xt} + u_{\alpha x})(1,t) = 0, \ 0 \le t \le T. \qquad (3.2.27)$$

$u_0(x) = 16\cos 8\pi x$ функциясы 3.2.1 – теоремасынын бардык шарттарын канаттандырат жана (3.2.27) чектик шарттарын төмөнкүчө жазсак болот:

$$u_{\alpha x}(0,t) = 0, \ u_{\alpha x}(1,t) = 0, \ 0 \le t \le T. \qquad (3.2.28)$$

Анда (3.2.25), (3.2.25), (3.2.25) чектик маселесинин чыгарылышы

$$u(x,t) = u_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{1+\alpha n^2\pi^2} t\right) \cos n\pi x, \qquad (3.2.29)$$

мында

$$u_{00} = 2\int_0^1 u_0(s)ds = 2 \cdot 16 \int_0^1 \cos 8\pi s \cos n\pi s ds = 0,$$

$$u_{0n} = 2\int_0^1 u_0(s) \cos n\pi s ds = 2 \cdot 16 \int_0^1 \cos 8\pi s \cos n\pi s ds = 0, \text{ если } n \ne 8.$$

$$u_{08} = 2 \cdot 16 \int_0^1 \cos 8\pi s \cos 8\pi s ds = 16 \int_0^1 (1 + \cos 16\pi s) ds = 16.$$

Анда (3.2.29)

$$u_\alpha(x,t) = e\text{xp}\left(-\frac{64\pi^2}{1+\alpha 64\pi^2} t\right) \cos 8\pi x$$

түрүнө ээ. Ал эми тиешелүү параболалык тендеме үчүн баштапкы чектик маселенин чыгарылышы

$$u(x,t) = e\mathrm{xp}\left(-64\pi^2 t\right)\cos 8\pi x$$

функциясы менен берилет.

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|u_\alpha(x,t) - u(x,t)\right| = \lim_{\alpha\to 0}\left|\left(e\mathrm{xp}\left(-\frac{64\pi^2}{1+\alpha 64\pi^2}t\right) - e\mathrm{xp}\left(-64\pi^2 t\right)\right)\cos 8\pi x\right| \to 0\,.$$

3.3. КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЖАРЫМ ОКТОГУ ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Q_T^+ аймагында псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик маселени карап көрөлү

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T^+, \qquad (3.3.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in[0,+\infty), \qquad (3.3.2)$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0\le t\le T, \qquad (3.3.3)$$

мында $\alpha > 0 -$ кичи параметр.

(3.3.1) -(3.3.3) маселеси – параболалык теңдеме үчүн жарым октогу чектик маселенин сингулярдык козголушу

$$\begin{cases} \vartheta_t(x,t) - \vartheta_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T^+, \\ \vartheta(x,0) = u_0(x), \quad x\in[0,+\infty), \\ \vartheta(0,t) = h(t), \quad 0\le t\le T. \end{cases} \qquad (3.3.4)$$

3.3.2-аныктама. $u(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$ функциясы (3.3.1) − (3.3.3) маселесинин классикалык чыгарылышы деп аталат,эгерде ал (3.3.1) теңдемесин, (3.3.2) баштапкы шарттын жана (3.3.3) чектик шарттын кадимки мааниде канааттандырса.

3.3.1 − теорема. Эгерде $\gamma < T-\alpha$ үчүн $u_0(x)\in C^{2}_{M_\gamma}[+($ $f(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\bar{Q}_T^+)$, $h(t)\in C^1[$ жана $f(0,t)=0, u_0(0)=h(0)=0$ болсо, анда Q_T^+ аймагында $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$ге таандык болгон (3.3.1) − (3.3.3) маселесинин классикалык чыгарылышы $\exists!$. Бул чыгарылыш төмөндөгүдөй түргө ээ:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^\infty \left[G(x-s,t) - G(x+s,t)\right] u_0(s)\,ds + e^{-\frac{x}{\alpha}} h(t) + \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\,d\xi\,d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_0^\infty \left[G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)\right] f(s,\tau)\,ds\,d\tau. \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

Мында

$$G(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x d\xi, \tag{3.3.6}$$

$$G_{\alpha}(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi. \tag{3.3.7}$$

Далилдөө. (3.3.1) теңдемеге жана (3.3.2) шартына x өзгөрмөсүнө карата Фурьенин синус өзгөртүүсүн колдонобуз. Натыйжада, биз кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесин алабыз:

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{u}(\xi,t)}{dt}+\dfrac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}\tilde{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\left[\tilde{f}(\xi,t)+\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\xi(\alpha^2 h'(t)+h(t))\right],\\ \tilde{u}(\xi,0)=\tilde{u}_0(\xi),\end{cases} \tag{3.3.8}$$

мында

$$\tilde{u}_0(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_0(x)\sin\xi x dx,\quad \tilde{f}(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x,t)\sin\xi x dx,$$

$$\tilde{u}(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(x,t)\sin\xi x dx.$$

Кадимки дифференциалдык теңдемелердин теориясынан белгилүү болгондой (3.3.8) маселесинин чыгарылышы төмөнкү формула менен берилет:

$$\tilde{u}(\xi,t)=\tilde{u}_0(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)+\frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t}\tilde{f}(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)d\tau+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^2\xi}{1+\alpha^2\xi^2}h(t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\int_0^{t}h(\tau)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)d\tau.$$

Мындан, Фурьенин тескери синус өзгөртүүсүн колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{u}_0(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\sin\xi x d\xi+h(t)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^2\xi}{1+\alpha^2\xi^2}\sin\xi x d\xi+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\left\{\int_0^{\infty}\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\sin\xi x d\xi\right\}d\tau+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t\int_0^{\infty}\tilde{f}(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi d\tau=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\sin\xi x\sin\xi s d\xi\right\}u_0(s)ds+e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\sin\xi x\sin\xi s}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi\right\}f(s,\tau)ds d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\left[\cos\xi(x-s)-\cos\xi(x+s)\right]d\xi\right\}u_0(s)ds+$$

$$+e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\left[\cos\xi(x-s)-\cos\xi(x+s)\right]}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi\right\}f(s,\tau)ds d\tau.$$

Демек, (3.3.6), (3.3.7) белгилөөлөрүн эске алуу менен (3.3.5) формуласын албыз.

Биз $G_\alpha(x,t)$ функциясынын кээ бир касиеттерин карап көрөлү жана аларды төмөнкү леммалар түрүндө берели:

3.3.1 – лемма. Төмөнкү барабардыктар орун алат:

$$G_\alpha(x,0)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\alpha}},\quad G_\alpha(0,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\eta^2}}\exp\left(-\eta^2 t\right)d\eta,$$

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t}+\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(0,t)=0.$$

Далилдөө. $G_\alpha(x,t)$ функциясын төмөнкүчө өзгөртөбүз:

$$G_\alpha(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x d\xi.$$

Анда

$$G_\alpha(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi.$$

Мындан, $y=\alpha\xi$ белгилөөсүн киргизип жана [16,с.536] дагы таблицаны колдонуп:

$$\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+x^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},$$

$G_\alpha(x,0)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\alpha}}$ туюнтмасын алабыз.

Андан ары

$$G_\alpha(0,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)d\xi$$

экендигин эске алып жана $\eta=\frac{\xi}{\sqrt{1+\alpha^2\xi^2}}$ өзгөрмөсүн киргизип

$$G_\alpha(0,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\eta^2}}\exp\left(-\eta^2 t\right)d\eta$$

туюнтмасына ээ болобуз.

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t}+\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(x,t)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)d\xi$$

интегралы бир калыпта жыйналуучу болгондуктан, ага $x=0$ маанисин коюп, $\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t}+\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(0,t)=0$ экендигине ээ болобуз.

3.3.2 –лемма. Каалагандай $p,q>0$ үчүн

$$\left|D_t^p D_x^q G_\alpha(x,t)\right|\le\frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}}{2\alpha}\left[(-\alpha^{-2})^p(1+(-\alpha^{-2})t)^p((-\alpha^{-2})^q(2+(\alpha^{-3}x))^q\right] \quad (3.3.9)$$

баалоосу орун алат.

Далилдөө. Тейлордун катарына ажыратууну колдонуп

$$e^{-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t}=e^{-\frac{t}{\alpha^2}}e^{\frac{t}{\alpha^2(1+\alpha^2\xi^2)}}=e^{-\frac{t}{\alpha^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!}(1+\alpha^2\xi^2)^{-k},$$

$G_\alpha(x,t)$ функциясын

$$G_\alpha(x,t)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{t}{\alpha^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^{k+1}}d\xi. \qquad (3.3.10)$$

түрүндө көрсөтөбүз.

Ар кандай $k=0,1,2,\ldots$ үчүн (2.3.10) интегралды карап көрөлү.

Таблицалык интегралды колдонуп [23, 427-б.]:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^n}dx=\frac{\pi e^{-ab}}{(2b)^{2n-1}(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(2n-i-2)!}{i!(n-i-1)!}(2ab)^i,$$

(3.3.10) дон

$$G_\alpha(x,t)=\frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{4\alpha^2}\right)^k\frac{1}{(k!)^2}\sum_{i=0}^{k}\frac{(2k-i)!}{i!(k-i)!}(2\alpha^{-1}x)^i$$

табабыз.

Бул жерден суммалоонун тартибин кайра иретке келтирип, ички суммага нөлдөн баштап өзгөргөн жаңы суммалоочу индексти киргизип ,

$$G_\alpha(x,t)=\frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha}\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-3}xt)^k}{k!}\frac{(\alpha^{-2}t)^m}{m!}\frac{(2m+k)!}{2^{2m+k}(k+m)!^2}$$

функциясын алабыз.

Барабарсыздыктын негиздүүлүгүн эске алып

$$\frac{(k+2m)!}{(k+m)!^2}\le 2^{k+2m},\ k,m=0,1,2,..., \qquad (2.3.11)$$

төмөнкүнү алабыз:

$$\left|G_\alpha(x,t)\right|\le\frac{e^{-\frac{(t+x)}{\alpha^2}}}{2\alpha}\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^m}{m!}\frac{(\alpha^{-3}tx)^k}{k!}\le\frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}}{2\alpha}, \qquad (3.3.12)$$

б.а. (3.3.9) баалоосун $p = q = 0$. болгон учурун алдык. Эми (3.3.9) баалоосунун $p > 0, q = 0$ болгон учурун далилдейли. Лейбниц формуласын колдонуп

$$\frac{\partial^p G_\alpha(x,t)}{\partial t^p} = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \frac{(-\alpha^{-2})^p e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha} \sum_{j=0}^{i} C_i^j \left[\sum_{m=i}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^{m-i}}{(m-i)!} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{k=i-j}^{\infty} \frac{(\alpha^{-3}t)^{k-j}(\alpha^{-3}x)^k}{(k-i+j)!} \frac{(2m+k)!}{(k+m)!^2} \right]$$

туюнтмасын алабыз.

Мындан (3.3.11), (3.3.12) барабарсыздыктарынын жардамы менен

$$\left| \frac{\partial^p G_\alpha(x,t)}{\partial t^p} \right| \le \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}} (\alpha^{-2})^p}{2\alpha} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{i} C_p^i C_i^j \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^m (\alpha^{-3}tx)^k (\alpha^{-3}x)^{i-j}}{m!k!} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{|x|(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}} (\alpha^{-2})^p}{2\alpha} \sum_{i=0}^{p} C_p^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (\alpha^{-3}x)^{i-j} = \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}} (\alpha^{-2})^p}{2\alpha} \sum_{i=0}^{p} C_p^i (1+(\alpha^{-3}x))^i =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}} (\alpha^{-2})^p}{2\alpha} (2+(\alpha^{-3}x))^p$$

баалоосун алабыз.

Ошентип, биз (3.3.9) баалоосунун $p > 0, q = 0$ болгон учурун далилдедик. Ошол сыяктуу эле, x боюнча q тартибине чейин дифференциялдап, биз алабыз:

$$\frac{\partial^q G_\alpha(x,t)}{\partial x^q} = \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha} \sum_{i=0}^{p} C_q^i (-\alpha^{-2})^{q-i} \left[\sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!^2} \sum_{m=i}^{k} \frac{(\alpha^{-3})^m x^{m-i}}{(m-j)!} \frac{(2m-k)!}{(k-m)!} \right].$$

Андан кийин (3.3.11), (3.3.12) барабарсыздыктарын дагы бир жолу колдонуп, биз төмөнкү баалоону алабыз:

$$\left|\frac{\partial^q G_\alpha(x,t)}{\partial x^q}\right| \le \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^q}{2\alpha}\sum_{i=0}^{q} C_q^i \sum_{m=i}^{\infty}\frac{(\alpha^{-3}x)^{m-i}}{(m-i)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^{k+m}}{k!} =$$

$$=\frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^q}{2\alpha}\sum_{i=0}^{q} C_q^i(\alpha^{-2}t)^i == \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^q}{2\alpha}(1+(\alpha^{-2}t))^q.$$

Ошентип, биз (3.3.9) баалоосунун $q>0,\ p=0$.болгон учурун алдык.

Каалагандай $p>0, q>0$ үчүн (3.3.9) баалоосу ушундай эле далилденет.

Белгилөө киргизели

$$u_1(x,t)=\int_0^\infty \left[G(x-s,t)-G(x+s,t)\right]u_0(s)ds,$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty \left[G_\alpha(x-s,t-\tau)-G_\alpha(x+s,t-\tau)\right]f(s,\tau)ds\,d\tau,$$

$$u_3(x,t)=e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\,d\tau.$$

$u_1(x,t)$ функциясын $(x,t)\in\overline{Q}_T^+$ учун баалайлы. $u_0(x)\in C^2_{M_\gamma}[0,+\infty)$, болгондуктан, (3.3.9), (3.3.8) эске алуу менен, биз төмөнкү баалоону алабыз:

$$|u_1(x,t)| \le \int_0^\infty \left[|G(x-s,t)|+|G(x+s,t)|\right]|u_0(s)|ds \le$$

$$\le C\int_0^\infty e^{\gamma|s|}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t}\left[\cos\xi(x-s)+\cos\xi(x-s)\right]d\xi\,ds \le \frac{C}{\alpha-T}.$$

$u_1(x,t)$ функциясы баштапкы шартты канааттандыраарын көрсөтөлү:

$$u_1(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x).$$

Чынында эле, $G(x,t)$ функциясынын түрүнөн жана Дирактын дельта функциясынын касиеттеринен биз алабыз:

$$u_1(x,0)=\int_0^\infty \left[G(x-s,0)-G(x+s,0)\right]u_0(s)ds=\int_0^\infty \delta(x-s)u_0(s)ds=u_0(x).$$

Ушул эле сыяктуу, $f(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}_T^+)$ шартынан $u_2(x,t)\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(\overline{Q}_T^+)$ келип чыгат.

Чынында эле

$$|u_2(x,t)|\le\int_0^t\int_0^\infty\Big[|G_\alpha(x-s,t-\tau)|+|G_\alpha(x+s,t-\tau)|\Big]|f(s,\tau)|ds\,d\tau\le$$

$$\le\int_0^t\int_0^\infty\Big(|G(x-s,t-\tau)|+|G(x+s,t-\tau)|\Big)|f(s,\tau|\,dsd\tau\le$$

$$\le\int_0^t\frac{C(\tau)}{2\alpha}\int_0^\infty e^{\gamma|s|}\left[e^{-\frac{|x-s|(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}+e^{-\frac{|x+s|(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}\right]dsd\tau.$$

Биринчи интегралда $s=y-x$ өзгөрмөсүнө алмаштырып, ал эми экинчисине $-s=y+x$, аны төмөнкү түргө келтиребиз:

$$|u_2(x,t)|\le\int_0^t\frac{C(\tau)}{2\alpha}\left[\int_x^\infty e^{\gamma|s|}e^{-\frac{y(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}dy+e^{\gamma|s|}\int_{-\infty}^{-x}e^{\frac{y(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}dy\right]d\tau\le\alpha\int_0^t\frac{C(\tau)e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}}{(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}d\tau.$$

Бул баалоодон $u_2(x,t)\big|_{t=0}=0$ экендиги келип чыгат.

$u_3(x,t)$ функциясы үзгүлтүксүз болушу үчүн өздүк эмес интегралдын

$$\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\,d\tau$$

бир калыпта жыйналуусун көрсөтүү жетиштүү.

Чынында эле

$$\left|\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\right|<\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}$$

болгондуктан, $\int_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi$ өздүк эмес интегралы жыйналат. Анда

$$|u_3(x,t)|=e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+\frac{2}{\pi}\int_0^t|h(\tau)|\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\left|\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\right|d\xi\,d\tau\le$$

$$\le e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+\frac{2}{\pi}\int_0^t|h(\tau)|\int_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\,d\tau\le e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+C_1\int_0^t|h(\tau)|d\tau,$$

мында

$$C_1=\int_0^{\infty}\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi.$$

Экинчи жагынан, өздүк эмес интегралдын чектүүлүгүн эске алып, $x\to+0$ пределге өтүп төмөнкүнү алабыз:

$$\lim_{x\to+0}u_3(x,t)=\lim_{x\to+0}e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+0}\int_0^t h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\,d\tau=h(t).$$

Анткени $f(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(1,0)}(\bar{Q}_T^+),\ u_0(x)\in C_{M_\gamma}^2[0,+\infty)$ болгондуктан, анда параметрге карата интегралдардын үзгүлтүксүздүгү жана үзгүлтүксүз дифференциалдуулугу жөнүндө теоремаларды, ошондой эле (3.3.9) баалоосун колдонуп, $u(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(\bar{Q}_T^+)$ деген жыйынтыкка келебиз. Ошентип, (3.3.5) формула менен аныкталган $u(x,t)$ функциясы (3.3.1) – (3.3.3) маселесинин классикалык чыгарылышы экендигин далилдедик. 3.3.1 теоремасы далилденди.

3.3.2 – теорема. Эгерде $f(x,t),u_0(x),\ h(t)$ функциялары үчүн 3.3.1 теоремасынын шарттары аткарылса, анда (3.3.1) – (3.3.3) маселенин чыгарылышы $\alpha\to0$ (3.3.4) маселесинин чыгарылышына бир калыпта жыйналат.

Чынында эле, $f(x,t),u_0(x),\ h(t)$ функциялары ушундай болсун (2.3.4) маселенин чыгарылышы $(x,t)\in Q_T^+$ үчүн ϑ_{xxt} үзгүлтүксүз туундусуна ээ болсун жана $\vartheta_{xxt}\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(\bar{Q}_T^+)$.

Мейли $u_\alpha(x,t)$ (3.3.1) – (3.3.3) маселесинин чыгарылышы болсун. Төмөнкү маселенин чыгарылышы болгон $w_\alpha(x,t)=u_\alpha(x,t)-\vartheta(x,t)$ функциясын карап көрөлү

$$w_{\alpha t}(x,t)-\alpha^2w_{\alpha xxt}(x,t)-w_{\alpha xx}(x,t)=\alpha^2\vartheta_{xxt}(x,t), \qquad (3.3.11)$$

$$w_\alpha(x,0)=0,\ w_\alpha(0,t)=0. \qquad (3.3.12)$$

3.3.1 − теоремасынын негизинде (3.3.11),(3.3.12) маселенин чыгарылышы төмөнкү түргө ээ

$$w_\alpha(x,t)=\alpha^2\int_0^t\int_0^\infty\left[G_\alpha(x-s,t-\tau)-G_\alpha(x+s,t-\tau)\right]v_{ss\tau}(s,\tau)ds\,d\tau. \qquad (3.3.13)$$

$w_\alpha(x,t)$ функциясы $(x,t)\in Q_T^+$ үчүн $\alpha\to+0$ нөлгө бир калыпта жыйналарын көрсөтөлү.

Ал эми

$$\left|G_\alpha(x-s,t-\tau)+G_\alpha(x-s,t-\tau)\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\left|\cos\xi(x-s)+\cos\xi(x+s)\right|d\xi\le$$

$$\le\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)d\xi\le\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi=\frac{2}{\alpha}$$

болгондуктан, анда (3.3.13) төн

$$\lim_{\alpha\to+0}\left|w_\alpha(x,t)\right|\le\lim_{\alpha\to+0}\alpha^2\int_0^t\int_0^\infty C(\tau)e^{\gamma|s|}\left|G_\alpha(x-s,t-\tau)+G_\alpha(x-s,t-\tau)\right|dsd\tau\le$$

$$\le\lim_{\alpha\to+0}\frac{2\alpha^2}{\alpha}C_1=0,\quad C_1=\int_0^t\int_0^\infty C(\tau)e^{\gamma|s|}dsd\tau$$

алабыз.

Демек, бардык $(x,t)\in Q_T^+$ үчүн $u_\alpha(x,t)$ функциясы $\alpha\to0$ да $\vartheta(x,t)$ функциясына бир калыпта жыйналат. 3.3.2 – теорема далилденди.

3.4. КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН АРАЛАШ ТҮРДӨГҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Маселенин коюлушу жана алынган жыйынтыктар

1. D_T областында кичинекей параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш баштапкы-чектик маселени карайлы

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in D_T, \tag{3.4.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ 0\le x\le\pi, \tag{3.4.2}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\ \left(\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\pi,t)=\psi(t),\ 0\le t\le T. \tag{3.4.3}$$

Мында $\varepsilon>0-$ кичи параметр.

(3.4.1) теңдемеси ε кичи параметрин кармагандыктан, (3.4.1) - (3.4.3) маселенин чыгарылышы ушул параметрге көз каранды жана мындан ары аны $u_\varepsilon(x,t)$ менен белгилейбиз.

(3.4.1) – (3.4.3) маселеси - параболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү баштапкы чектик маселенин сингулярдык козголушу болот:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in D_T, \tag{3.4.4}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ 0\le x\le\pi, \tag{3.4.5}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=\psi(t),\ 0\le t\le T. \tag{3.4.6}$$

3.4.1 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2[0,l],\ \varphi(t)\in C^1[0,T],\ \psi(t)\in C^1[0,T]$, мындан тышкары $u_0(0)=\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0,\ u_0'(\pi)=\psi(0)=0,\ \psi(0)=0$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда (3.4.1) – (3.4.3) маселесинин чыгарылышы $\exists!$ жана

$$u_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)z(\tau)d\tau\sin\lambda_n x \qquad (3.4.7)$$

түрүнө ээ. Мында $\lambda_n=\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)^2$.

Далилдөө. (3.4.1) – (3.4.3) маселесине тиешелүү

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X'(\pi)=0$$

Штурма-Лиувиллдин маселесин карайлы. Бул маселенин өздүк маанилеринин жана өздүк функцияларынын түрү төмөнкүчө:

$$\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{2n-1}{2}x,\ n\in\mathbb{N}.$$

(3.4.1) – (3.4.3) маселесинин чыгарылышын $X_n(x)=\sin\dfrac{2n-1}{2}x$ боюнча төмөнкү катар түрүндө издейбиз:

$$u_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\lambda_n x, \qquad (3.4.8)$$

мында

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_\varepsilon(x,t)\sin\lambda_n x\,dx. \qquad (3.4.9)$$

(3.4.8) туюнтмасын боюнча эки жолу бөлүктөп интегралдап

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\lambda_n}\varphi(t)-\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\psi(t)\right]-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^\pi u_{\varepsilon xx}(x,t)\sin\lambda_n x\,dx \qquad (3.4.10)$$

туюнтмасын алабыз.

Ошондой эле

$$\varepsilon T_n'(t)=\frac{2}{\pi}\varepsilon\left[\frac{1}{\lambda_n}\varphi'(t)-\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\psi'(t)\right]-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{\lambda_n^2}\int_0^\pi u_{\varepsilon xxt}(x,t)\sin\lambda_n x\,dx. \qquad (3.4.11)$$

(3.4.10) жана (3.4.11) туюнтмаларын (3.4.7) ге коюп, (3.4.1) тендемесин, (3.4.2) баштапкы шартын эске алып төмөнкү Коши маселесин алабыз:

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2} T_n(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\left[\lambda_n\left(\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right) - (-1)^n\left(\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right)\right], \\ T_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

(3.4.12) маселесинин чыгарылышы:

$$T_n(t) = u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right) z(\tau)d\tau, \quad (3.4.13)$$

мында

$$z(t) = \lambda_n\left(\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right) + (-1)^{n+1}\left(\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right).$$

Табылган (3.4.13) чыгарылышын (3.4.8) ге коюп, (3.4.1) – (3.4.3) маселесинин формалдуу (3.4.7) чыгарылышын алабыз:

$$u_\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x + $$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right) z(\tau)d\tau \sin\lambda_n x,$$

(3.4.7) чыгарылышын негиздегенге өтөлү. $u_0(x)$ функциясына коюлган шарттардан

$$|u_{0n}| \le \frac{const}{(2n-1)^2} \quad (3.4.14)$$

барабарсыздыгынын аткарылышы келип чыгат.

(3.4.14) барабарсыздыгынан жана бардык $t \ge 0$ үчүн аткарылган $0 < \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right) \le 1$ барабарсыздыгынан

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x$$

катарынын D_T областында бир калыпта жана абсолюттук жыйналуучулугу келип чыгат.

Мындан тышкары

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\lambda_n^2 u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x$$

катарлары дагы D_T областында бир калыпта жана абсолюттуу жыйналат.

Эми (3.4.13) барабарсыдыгынын экинчи кошулуучусунун жыйналуучулугун далилдейли. Экинчи кошулуучуну түздөн түз баалайлы.

$$\left|\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)z(\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)\lambda_n\left(\varepsilon\varphi'(\tau)+\varphi(\tau)\right)d\tau\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)(-1)^{n+1}\left(\varepsilon\psi'(\tau)+\psi(\tau)\right)d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\lambda_n}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\right)\left\|\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right\|+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n^2}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\right)\left\|\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right\|.$$

Анда

$$\frac{2}{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)z(\tau)d\tau\sin\lambda_n x\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\right)\left[\frac{1}{\lambda_n}\left\|\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right\|+\frac{1}{\lambda_n^2}\left\|\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right\|\right]\sin\lambda_n x\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\left\|\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\right)\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left\|\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\right)\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n^2}\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\left\|\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n}+\frac{2}{\pi}\left\|\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n^2}.$$

Мында $\|f\| = \max_{0\le t\le T} |f(t)|$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, 0 < x < \pi, \\ 0, \quad x = 0, x = \pi \end{cases}$$

формуласын колдонуп, акыркы барабарсыздыктан төмөнкү катнашты алабыз:

$$\frac{2}{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)z(\tau)d\tau\sin\lambda_n x\right| \le \frac{1}{2}\left\|\varepsilon\varphi'(t)+\varphi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n^2} + \\ +\frac{2}{\pi}\left\|\varepsilon\psi'(t)+\psi(t)\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n^2}. \quad (3.4.15)$$

Вейерштрасттын белгиси боюнча $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ катарынын жыйналуучулугунан жана (3.4.15) барабарсыздыгынан $\overline{\Omega}_T$ областында экинчи кошулуучунун жыйналуучулугу келип чыгат. Ушул эле сыяктуу $u_t(x,t),\ u_{xx}(x,t)$ туундуларынын жыйналуучулугун көрсөтүүгө болот.

3.4.1 – теорема далилденди.

Эми (3.4.4) – (3.4.6) аралаш түрдөгү чектик маселе үчүн төмөнкү теорема орн алат:

3.4.2 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^2[0,\pi],\ \varphi(t)\in C^1[0,T],$ $\psi(t)\in C^1[0,T],$ мындан тышкары $u_0(0)=\varphi(0)=0, \varphi'(0)=0$ $u_0'(\pi)=\psi(0)=0, \psi'(0)=0$ макулдашуу шарттары орун алсын Анда (3.4.4) – (3.4.6) маселесинин чыгарылышы $\exists!$ жана

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x + \\ +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left\{\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)+(-1)^{n+1}f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{2n-1}{2}x. \quad (3.4.16)$$

түрүнө ээ. Мында $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$.

Мындан тышкары (3.4.1) – (3.4.3) козголгон маселесинин чыгарылышы $\varepsilon \to 0$ (3.4.4) – (3.4.6) маселесинин чыгарылышына жыйналат, б.а. $\left\| u_\varepsilon(x,t) - u(x,t) \right\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.

Далилдөө. (3.4.4) – (3.4.6) маселесинин чыгарылышын

$$u_\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\lambda_n x, \tag{3.4.17}$$

түрүндө издейбиз,

мында

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_\varepsilon(x,t)\sin\lambda_n x\,dx. \tag{3.4.18}$$

Анда $T_n(t)$ үчүн, төмөнкү маселени алабыз

$$\begin{cases} T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\left[\lambda_n \varphi(t) - (-1)^n f(t)\right], \\ T_n(0) = u_{0n}, \end{cases} \tag{3.4.19}$$

мында

$$u_{0n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin\lambda_n x dx.$$

(3.4.19) маселесинин чыгарылышы

$$\begin{gathered} T_n(t) = u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right) + \\ +\frac{2}{\pi}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau) - (-1)^n f(\tau)\right]d\tau. \end{gathered} \tag{3.4.20}$$

түрүнө ээ.

(3.4.20) ны (3.4.18) ке коюп, (3.4.4) – (3.4.6) маселесинин чыгарылышын алабыз:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}\exp\left(-\lambda_n^2 t\right)\sin\lambda_n x + \\ +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\lambda_n^2(t-\tau)\right)\left\{\left[\lambda_n\varphi(\tau) + (-1)^{n+1} f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\lambda_n x. \end{gathered}, \tag{3.4.21}$$

(3.4.7) формуласынан при $\varepsilon \to 0$ пределге өтүп (3.4.4) – (3.4.6) маселесинин чыгарылышын алабыз. 3.4.2 – теорема далилденди.

ҮЧҮНЧҮ ГЛАВА БОЮНЧА КОРУТУНДУ

Бул главада кичи параметрди кармаган псевдопараболалык теңдемелер үчүн түз маселелер изилденди. Изилденген маселелер үчүн айкын чыгарылыштар тургузулду жана негизделди. Мындан тышкары алынган чыгарылыштардын кичи параметр нөлгө умтулганда тиешелүү параболалык теңдеме үчүн коюлган түз маселенин чыгарылышына умтулары көрсөтүлдү.

4 – ГЛАВА. ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕЛЕР ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

Бул главада ар кандай чектик тескери маселелер, чек ара шартына кирген функция белгисиз болгон учурда псевдопараболалык теңдеменин чыгарылышын табуу маселеси изилденет. Мындай маселени башкаруу маселеси катары чечмелөөгө болот, мында чыгарылыш менен бирге бардык убакыт $t \in [0,T]$ боюнча чек ара шарттарынын бирин табуу талап кылынат.

Ар түрдүү кичи параметри бар псевдопараболалык теңдемелер үчүн түз маселелер (биринчи жана экинчи баштапкы-чектик маселелер, ошондой эле жарым октогу чектик маселелер [2-5] изилденген. Бул эмгектерде тиешелүү. каралып жаткан маселелердин классикалык чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденген.

Ар кандай формулировкалардагы псевдопараболалык теңдемелердин белгисиз чектик шарттарын табуу менен бирге чыгарылышты табуу чектик тескери маселелер мурда [4–9] изилденген.

4.1. Псевдопараболалык теңдеме үчүн тескери чектик маселенин чечимдүүлүгү жөнүндө

4.1.1.Тескери маселенин бир маанилүү чечимдүүлүгү

Псевдопараболалык теңдеме үчүн жуп $\{u(x,t), f(t)\}$ функцияларынын аныктоо тескери маселесин карап көрөлү:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{4.1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.1.2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1.3}$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1.4}$$

мында $u_0(x), \varphi(t), h(t) -$ белгилүү функциялар, ал эми $x_0 \in (0,\pi)$ берилген сан, $\varepsilon > 0 -$кичи параметр.

(4.1.1) теңдемеси ε параметрин кармагандыктан, (4.1.1) -(4.1.4) чектик тескери маселенин чыгарылышы дагы ушул ε параметринен көз каранды. Демек, (4.1.1) – (4.1.4) чектик тескери маселесинин чыгарылышын тиешелүү түрдө $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ аркылуу белгилейбиз.

4.1.1 – аныктама. Эгерде $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T),\ f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ жуп функциялары классикалык мааниде (4.1.1) – (4.1.4) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$жуп функциялары (4.1.1) - (4.1.4) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат.

4.1.1 – теорема. Мейли $u_0(x) \in C^3[0,\pi], \quad \varphi(t) \in C^1[0,T], h(t) \in C^1[0,T]$ жана $u_0(0) = \varphi(0) = 0,\ u_0(\pi) = 0, u_0''(0) = 0, u_0''(\pi) = 0,\ u_0(x_0) = h(0)$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда $\forall \varepsilon > 0$ үчүн (4.1.1) – (4.1.4) чектик тескери маселесинин чыгарылышы $\exists !$.

Далилдөө. $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ функциялары (4.1.1) – (4.1.4) тескери маселесинин чыгарылышы болсун. (4.1.1) – (4.1.4) тескери маселеси сызыктуу болгондуктан, анын чыгарылышын төмөнкүчө издөөгө болот [1]:

$$\left(u_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t)\right) = \left(v_\varepsilon(x,t), 0\right) + \left(w_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t)\right), \tag{4.1.5}$$

мында $v_\varepsilon(x,t)$ төмөнкү маселени канааттандырат

$$v_{\varepsilon t}(x,t) = \varepsilon^2 v_{\varepsilon xxt}(x,t) + v_{\varepsilon xx}(x,t), \tag{4.1.6}$$

$$v_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.1.7}$$

$$v_\varepsilon(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad v_\varepsilon(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1.8}$$

ал эми $\left(w_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t)\right)$ жуп функциялары төмөнкү маселени канааттандырат

$$w_{\varepsilon t}(x,t) = \varepsilon^2 w_{\varepsilon xxt}(x,t) + w_{\varepsilon xx}(x,t), \tag{4.1.9}$$

$$w_\varepsilon(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.1.10}$$

$$w_\varepsilon(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \qquad w_\varepsilon(\pi,t) = f_\varepsilon(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1.11}$$

$$w_\varepsilon(x_0,t) = h(t) - v_\varepsilon(x_0,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4.1.12}$$

3.1.1 теоремасынын шарттарында (4.1.6) – (4.1.8) маселенин классикалык чыгарылышы ∃! [3] жана

$$v_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}t\right)\right)u_{0n}\sin(nx)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\varphi(t)\sin(nx)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n)}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon\pi)^2}(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\sin(nx), \qquad (4.1.13)$$

формуласы менен берилет,

мында

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0(x)\sin nxdx.$$

Алгачкы (4.1.1.) – (4.1.3) маселесин Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине келтиребиз. Бул үчүн $f_\varepsilon(t)$ функциясын белгилүү деп эсептеп (4.1.9) – (4.1.11) түз маселени чыгарабыз. (4.1.9) – (4.1.11) маселенин чыгарылышы төмөнкү түрдө көрсөтүүгө болот

$$w_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n f_\varepsilon(t)}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\sin(nx)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)(-1)^n f_\varepsilon(\tau)d\tau\sin(nx).$$

Анда (4.1.5) формуласы боюнча биз

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n f_\varepsilon(t)}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\sin(nx)-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)(-1)^n f_\varepsilon(\tau)d\tau\sin(nx) \qquad (4.1.14)$$

чыгарылышын алабыз.

(4.1.14) формуласына $x = x_0$ ду коюп, (4.1.12) кошумча маалыматын колдонобуз. Андан ары интегралдоо жана суммалоо операцияларынын ордун алмаштырып, биз Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесин алабыз:

$$\tilde{f}_\varepsilon(t) - \frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde{f}_\varepsilon(\tau)d\tau = \frac{1}{L}F_\varepsilon(t), \qquad (4.1.15)$$

мында

$$L = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(1+(n\varepsilon)^2)n}\sin nx_0,\;\; K_\varepsilon(t,\tau) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n e^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}\sin nx_0}{(1+(\varepsilon n)^2)^2} \qquad (4.1.16)$$

$$F_\varepsilon(t) = h(t) - v_\varepsilon(x_0, t).$$

$K_\varepsilon(t,\tau)$, $F_\varepsilon(t)$ функциялары үзгүлтүксүз функциялар экенин көрсөтөлү.

Албетте, $F_\varepsilon(t)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү $v_\varepsilon(x_0,t)$, $h(t)$ функцияларынын үзгүлтүксүздүгүнөн келип чыгат.

$K_\varepsilon(t,\tau)$ ядросун баалап

$$|K_\varepsilon(t,\tau)| \le \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(-1)^n n|e^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}}{(1+(\varepsilon n)^2)^2} \le \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2} \le \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^4 n^3}$$

(4.1.16) катары жыйналаарына ээ болобуз, демек, $K_\varepsilon(t,\tau)$ функциясы үзгүлтүксүз функция болуп саналат. Анда (4.1.15) теңдемесинин ядросу үзгүлтүксүз жана оң жаккы функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан анын чыгарылышы $f_\varepsilon(t) \in C([0,T])$ жашайт жана жалгыз. Ал чыгарылышты удаалаштыкты жакындаштыруу ыкмасы менен табууга болот.

4.1.1 теоремасы далилденди.

4.1.2 – теорема. Мейли $(u_{1\varepsilon}, f_{1\varepsilon})$ жана $(u_{1\varepsilon}, f_{1\varepsilon})$ функциялары (4.1.1) – (4.1.4) тескери маселесинин шарттарын канааттандырган каалагандай эки жуп функция болсун, ал эми $u_0^1(x)$, $u_0^2(x)$, $\varphi_1(t)$ жана $\varphi_2(t)$ $h_1(t)$, $h_2(t)$ тескери маселеге жооп берген берилиштер болсун.Анда ар кандай чектүү *T>0* үчүн $C = C(\varepsilon, T)$) туруктуу саны табылып төмөнкүдөй баалоо орун алат:

$$\|f_{1\varepsilon}(t)-f_{2\varepsilon}(t)\|_{C([0,T])}\le C(\varepsilon,T)\Big[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])}+\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\Big]+ \\ +C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}, \qquad (4.1.17)$$

$$\|u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}\|_{C(\bar{\Omega}_T)}\le C(\varepsilon,T)\Big[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])}+\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\Big]+ \\ +C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}. \qquad (4.1.18)$$

Далилдөө. Мейли $f_{1\varepsilon}(t)$ жана $f_{2\varepsilon}(t)$ (4.1.1) – (4.1.4) тескери маселенин эки чыгарылышы болсун. Эки функциянын айырмасын $\tilde{f}_\varepsilon(t)$ менен белгилейли, б.а. $\tilde{f}_\varepsilon(t)=f_{1\varepsilon}(t)-f_{2\varepsilon}(t)$.. Анда (4.1.15) теңдемесинен төмөнкү теңдемени алуу оңой:

$$\tilde{f}_\varepsilon(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde{f}_\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\Big[\big(h_1(t)-h_2(t)\big)-\big(v_{0\varepsilon}^1(x,t)-v_{0\varepsilon}^2(x,t)\big)\Big], \qquad (4.1.19)$$

(4.1.19) ду түздөн-түз баалап, биз төмөнкүнү алабыз:

$$\|\tilde{f}_\varepsilon(t)\|_{C[0,T]}+\frac{1}{L}\int_0^t\|K_\varepsilon(t,\tau)\|_C\,\|\tilde{f}_\varepsilon(\tau)\|_{C[0,T]}d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{L}\Big[\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C[0,T]}+\|v_{0\varepsilon}^1(x_0,t)-v_{0\varepsilon}^2(x_0,t)\|_{C[0,T]}\Big].$$

Ал эми

$$\|v_{0\varepsilon}^1(x,t)-v_{0\varepsilon}^2(x,t)\|_{C(\bar{D}_T)}\le C(\varepsilon,T)\Big[\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}+\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C[0,T]}\Big]$$

болгондуктан, анда Гронуолла-Беллмана леммасынын жардамы менен акыркы барабарсыздыктан (4.1.17) баалоосун алабыз. (4.1.14) теңдемесин түз баалап жана (4.1.17) баалоосун эске алуу менен (4.1.18) баалоосун алабыз. 4.1.2 –теоремасы далилденди.

4.2. Псевдопараболалык теңдеме үчүн интегралдык кайра аныктоосу менен тескери чектик маселеси

Бул пунктта Фурье ыкмасын колдонууга жана [3] ишинде алынган биринчи баштапкы – чектик маселенин аналитикалык чыгарылышына негизделген тескери чектик маселесин чыгаруу ыкмасы сунушталат. Натыйжада интервалдын оң жагында берилген чектик функцияга карата экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемеси алынат.

1.Маселенин коюлушу

D_T аймагында биз кичи параметри бар бир өлчөмдүү псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи баштапкы-чектик маселесин карайбыз:

$$u_t(x,t)=\varepsilon^2 u_{xxt}(x,t)+u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in D_T, \tag{4.2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le \pi, \tag{4.2.2}$$

$$u(0,t)=\varphi(t), \quad u(\pi,t)=f(t), \quad 0\le t\le T, \tag{4.2.3}$$

мында $\varepsilon>0-$кичи параметр.

Тескери маселени карайлы. Мейли (4.2.1) – (4.2.3) баштапкы-чектик маселесинде $u_0(x), \varphi(t)$ функциялары берилсин, ал эми $f(t)-$ белгисиз функция болсун. $f(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, эгерде

$$\int_0^\pi u(x,t)dx=h(t), \quad 0\le t\le T, \tag{4.2.4}$$

мында $h(t)-$берилген функция,

(4.2.4) шарты **интегралдык кайра аныктоо шарты** деп аталат.

Ар кандай кайра аныктоо шарттары менен жылуулук теңдемеси үчүн чектик тескери маселелер көптөгөн авторлор тарабынан изилденген. Соболев тибиндеги теңдемеге келсек, атап айтканда псевдопараболикалык теңдеме үчүн мындай маселелер аз изилденген. Биз [5–8] эмгектерин гана белгилей кетели.

4.1.1 бөлүмүндөгүдөй эле (4.2.1) теңдемеси ε параметрин кармагандыктан, (4.2.1) – (4.2.4) тескери маселенин чыгарылышы дагы ушул

параметрден көз каранды. Демек, тескери маселенин чыгарылышын дагы тиешелүү түрдө $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ деп белгилейбиз.

4.2.1 – аныктама. Эгерде $u_\varepsilon(x,t)\in C^{(2,1)}(\Omega_T)\cap C(\bar{\Omega}_T),\ f_\varepsilon(t)\in C_0^1[0,T]$ жуп функциялары классикалык мааниде (4.2.1) - (4.2.4) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ жуп функциялары (4.2.1) - (4.2.4) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат,.

4.2.2.Бир маанилүү чечимдүүлүк

4.2.1 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$, $h(t)\in C([0,T])$ жана төмөнкү макулдашуу шарттары аткарылсын: $u_0(0)=\varphi(0)=0, u_0(\pi)=f(0)=0,\ u_0''(0)=u_0''(\pi)=0,$ $\int_0^\pi u_0(x)dx=h(0)$. Анда каалагандай $\varepsilon>0$ саны үчүн (4.2.1) – (4.2.4) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

Далилдөө. (4.2.1) – (4.2.3) түз маселенин чыгарылышы төмөнкү формула менен аныкталат ([43]):

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n f_\varepsilon(t)}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\sin(nx)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)(-1)^n f_\varepsilon(\tau)d\tau\sin(nx), \tag{4.2.5}$$

мында

$$v_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{u}_{0n}}{n^2}\left(1-\exp\left\{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}t\right\}\right)\sin nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\varphi(t)\sin(nx)- \tag{4.2.6}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\sin(nx),$$

$$\tilde{u}_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0''(x)\sin nxdx.$$

(4.2.5) барабардыгын x аргументи боюнча $(0,\pi)$-ча интегралдап жана (4.2.4) шарттын колдонуп жана кээ бир өзгөртүлөрдү жүргүзгөндөн кийин

$$f_\varepsilon(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)f_\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{L}F_\varepsilon(t) \qquad (4.2.7)$$

интегралдык теңдемесин алабыз, мында

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(\varepsilon n)^2)n^2},\ K_\varepsilon(t,\tau)=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right),$$

$$F_\varepsilon(t)=\frac{1}{L}\left(h(t)-\int_0^\pi v_\varepsilon(x,t)dx\right).$$

$K_\varepsilon(t,\tau)$, $F_\varepsilon(t)$ функциялары үзгүлтүксүз функциялар экенин көрсөтөлү. Албетте, $F_\varepsilon(t)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү $v_\varepsilon(x,t)$, $h(t)$ функцияларынын үзгүлтүксүздүгүнөн келип чыгат. $v_\varepsilon(x,t)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөлү.

Ал үчүн $\varphi(t), u_0(x)$ функцияларын камтыган катардын жыйналуучулугун изилдейбиз.

Ал эми

$$u_0(x)\in C^{(3)}([0,\pi]),\ u_=(0)=0, u_0(\pi)=0, u_0''(0)=u_0''(\pi)=0,$$

$$\left|\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\right|\le M\left|\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1+(\varepsilon n)^2}{n^2}M\left(1-\exp\left(-\frac{n^2t}{1+(\varepsilon n)^2}\right)\right),$$

болгондуктан, анда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(1-\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}t\right)\right)u_{0n}\sin(nx)\right|\le\frac{C}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon\pi)^2}(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\sin(nx)\right|\le$$

$$\le 2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\left(1-\exp\left(-\frac{n^2t}{1+(\varepsilon n)^2}\right)\right)\le 2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(\varepsilon n)^2)n}.$$

Мындан $\varphi(t), u_0(x)$ функцияларын камтыган катар жыйналат, демек, $v_\varepsilon(x,t)$ жана $F_\varepsilon(t)$ функциялары үзгүлтүксүз функциялар болуп саналат. Эми $K_\varepsilon(t,\tau)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөбүз:

$$|K_\varepsilon(t,\tau)| \le \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2(1-(-1)^n)}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\right| \exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right) \le \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(1+(\varepsilon(2n-1)^2)^2}\right| < +\infty.$$

Бул $K_\varepsilon(t,\tau)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн билдирет. Демек, (4.2.7) теңдемеси үзгүлтүксүз ядросу жана үзгүлтүксүз оң жактагы функциясы бар экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдеме, ошондуктан (4.2.7) теңдемеси $f_\varepsilon(t) \in C([0,T])$ жалгыз чыгарылышка ээ. Анын чыгарылышын удаалаштыкты жакындатуу ыкмасы менен табууга болот. Табылган $f_\varepsilon(t)$ функциясын (4.2.5) ке коюп, $u_\varepsilon(x,t)$ функциясын алабыз. 4.2.1 – теорема далилденди.

4.2.2 – теорема. Мейли $(u_{1\varepsilon}, f_{1\varepsilon})$ жана $(u_{2\varepsilon}, f_{2\varepsilon})$ экилдик функциялары (4.2.1) – (4.2.4) тескери маселесинин шарттарын канааттандырган каалагандай эки экилдик функциялар болсун, ал эми $u_0^1(x)$, $u_0^2(x)$, $\varphi_1(t)$ жана $\varphi_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ тескери маселенин маалыматтарына туура келген берилиштер болсун. Анда ар кандай чектүү *T>0* саны үчүн турактуу $C = C(\varepsilon,T)$ саны табылып төмөнкү баалоо орун алат:

$$\begin{aligned}&\| f_{1\varepsilon}(t) - f_{2\varepsilon}(t)\|_{C([0,T])} \le C(\varepsilon,T)\left[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])} + \|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\right] + \\ &+C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]},\end{aligned} \qquad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned}&\|u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \le C(\varepsilon,T)\left[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])} + \|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\right] + \\ &+C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}\end{aligned}. \qquad (4.2.9)$$

Далилдөө. Мейли (4.2.1) – (4.2.4) тескери маселенин эки чыгарылышы $f_{1\varepsilon}(t)$ жана $f_{2\varepsilon}(t)$ болсун. Эки функциянын айырмасын $\tilde{f}_\varepsilon(t)$ менен

белгилейли, б.а. $\tilde{f}_\varepsilon(t) = f_{1\varepsilon}(t) - f_{2\varepsilon}(t)$.. Анда (4.2.7) теңдемесинен төмөнкү теңдемени алуу оңой:

$$\tilde{f}_\varepsilon(t) - \frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde{f}_\varepsilon(\tau)d\tau = \frac{1}{L}\left[\left(h_1(t) - h_2(t)\right) - \int_0^\pi \left(v_{0\varepsilon}^1(x,t) - v_{0\varepsilon}^2(x,t)\right)dx\right]. \quad (4.2.10)$$

Ал эми (4.2.6) түздөн - түз баалап, $|\tilde{u}_{0n}| \le \frac{C}{n^2}$ экендигин эске алып,төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^\pi \left|\left(v_\varepsilon^1(x,t) - v_\varepsilon^2(x,t)\right)\right|dx \le C(\varepsilon,T)\left[\|u_{01}(x) - u_{02}(x)\|_{C^2[0,\pi]} + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{C[0,T]}\right].$$

Анда (4.2.10) дон

$$\left\|\tilde{f}_\varepsilon(t)\right\|_{C[0,T]} + \frac{1}{L}\int_0^t \|K_\varepsilon(t,\tau)\|_C \left\|\tilde{f}_\varepsilon(\tau)\right\|_{C[0,T]} d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{L}\left\{\|h_1(t) - h_2(t)\|_{C[0,T]} + C(\varepsilon,T)\left[\|u_{01}(x) - u_{02}(x)\|_{C^2[0,\pi]} + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{C[0,T]}\right]\right\}$$

барабарсыздыгын алабыз.

Мындан, Гронуолл-Беллмандын леммасынын жардамы менен биз (4.2.8) баалоосун алабыз. (4.2.5) теңдемесин түздон-түз баалап жана (4.2.8) баалоосун эске алуу менен (4.2.9) баалоосун алабыз. 4.2.2 – теорема далилденди.

4.3. Белгисиз чектик шарты бар псевдопараболалык теңдеме үчүн тескери маселенин бир маанилүү чечимдүлүгү жөнүндө

Бул бөлүмдө интервалдын оң жагында берилген функцияны аныктоо тескери маселеси изилденип, [42] ишинде алынган экинчи баштапкы-чектик маселенин аналитикалык чыгарылышын колдонулушуна негизделген тескери чектик маселенин чыгаруунун ыкмасы сунушталат.

4.3.1.Маселенин коюлушу.

Мейли D_T аймагында псевдопараболалык теңдеме үчүн төмөнкү тескери маселени карап көрөлү:

Тескери маселе. Төмөнкү шарттардан $u(x,t)$ жана $f(t)$ экилдик функцияларынын табуу керек:

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{4.3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.3.2}$$

$$(\varepsilon u_{xt} + u_x)(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \ (\varepsilon u_{xt} + u_x)(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.3.3}$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.3.4}$$

мында $\varepsilon > 0$ – кичи параметр, $u_0(x), \varphi(t)$, $h(t)$ – берилген функциялар.

Мындан ары, (4.3.1) теңдемеси ε параметрин кармагандыктан, (4.3.1) - (4.3.4) тескери маселенин чыгарылышы дагы ушул параметрден көз каранды. Демек, тескери маселенин чыгарылышын дагы тиешелүү түрдө $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ деп белгилейбиз.

4.3.1 – аныктама. Эгерде $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ жуп функциялары классикалык мааниде (4.3.1) – (4.3.4) барабардыктарын канааттандырса, анда $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ жуп функциялары (4.3.1) – (4.3.4) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат,.

Эскертүү. Макулдашуу шарттары аткарылганда, (4.3.3) чектик шарттарын төмөнкү формада кайра жазууга болот:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=\mu_2(t),\ 0\le t\le T, \qquad (4.3.5)$$

мында

$$\mu_1(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \qquad \mu_2(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}f_\varepsilon(\tau)d\tau. \qquad (4.3.6)$$

4.3.2.Бир маанилүү чечимдүүлүк

4.3.1 – теорема. Мейли $u_0(x)\in C^3[0,\pi]$, $\varphi(t)\in C^1[0,\pi]$, $h(t)\in C^1[0,\pi]$ жана $u_0^{'}(0)=\varphi(0)=0, u_0^{'}(\pi)=f_\varepsilon(0)=0,\quad u_0(0)=h(0)$ макулдашуу шарттары орун алсын, мындан тышкары $u_0^{''}(0)=u_0^{''}(\pi)=0$. Анда каалагандай $\varepsilon>0$ саны үчүн (4.3.1) – (4.3.4) тескери маселесинин $\exists!$.

Далилдөө. Мейли $u_\varepsilon(x,t)$ жана $f_\varepsilon(t)$ функциялары (4.3.1) – (4.3.4) тескери маселесинин чыгарылышы болсун. Алгач, (4.3.1) – (4.3.3) маселесин бир тектүү чектик шарттары бар маселеге келтиребиз, андан кийин [3] ишинде алынган (4.3.1), (4.3.2), (4.3.5) маселесинин айкын чыгарылышын колдонобуз. Белгилөө киргизебиз

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+w(x,t), \qquad (4.3.7)$$

бул жерде $v_\varepsilon(x,t)$ – жаңы белгисиз функция, ал эми

$$w(x,t)=u_0(x)+x\mu_1(t)+\frac{x^2}{2\pi}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Жыйынтыгында $v_\varepsilon(x,t)$ функциясына карата төмөнкү башатапкы-чектик маселени алабыз:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2}=F_\varepsilon(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (4.3.8)$$

$$v_\varepsilon(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi, \qquad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(\pi,t)=0,\ 0\le t\le T, \qquad (4.3.10)$$

мында

$$F_\varepsilon(x,t)=u_0''(x)+\frac{1}{\pi}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-x\mu_1'(t)-\left(\frac{x^2}{2\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right].$$

Анда (4.3.8) – (4.3.10) маселенин чыгарылышы түрүнө ээ болот([42] кара):

$$u_\varepsilon(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t F_{\varepsilon 0}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{n^2}{1+\varepsilon n^2}(t-\tau)\right)F_{\varepsilon n}(\tau)d\tau\right\}\cos nx, \quad (4.3.11)$$

мында $F_{\varepsilon 0}(t)$, $F_{\varepsilon n}(t), n=1,2,...,...$, u_{0n} Фурье коэффициенттери

$$F_{\varepsilon 0}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_\varepsilon(x,t)dx=\frac{1}{\pi}\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon\right)\left(\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right)-\frac{1}{\pi}\mu_1'(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\left[f_\varepsilon(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau+\frac{1}{\pi\varepsilon}\left(\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon\right)\left(f_\varepsilon(t)-\varphi(t)\right)-\frac{1}{\pi\varepsilon}\varphi(t),$$

$$F_{\varepsilon n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_\varepsilon(x,t)\cos(nx)dx=\frac{1}{n^2}u_{0n}+\frac{2}{\pi n^2}(-1)^n\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right]+$$

$$+\frac{2\mu_1'(t)}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{1}{n^2}u_{0n}--\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right]+ \quad (4.3.12)$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(-1)^n\left[f_\varepsilon(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}f_\varepsilon(\tau)d\tau\right],$$

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(x)\cos nx dx$$

формулалары менен эсептелет.

Табылган $F_{\varepsilon 0}(t), F_{\varepsilon n}(t)$функцияларын (4.3.11) ге коюп, биз алабыз:

$$u_\varepsilon(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t F_{\varepsilon 0}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon n^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{n^2}{1+\varepsilon n^2}(t-\tau)\right)F_{\varepsilon n}(\tau)d\tau\right\}\cos nx.$$

(4.3.11) формуласына x=0 ду коюп, (4.3.7) ни жана (4.3.12) ни эске алып,

$$\tilde{f}_\varepsilon(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde{f}_\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{L}F_\varepsilon(t), \quad (4.3.13)$$

интегралдык тендемесин алабыз, мында

$$K_\varepsilon(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n n e^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\right\},$$

ядросу үзгүлтүксүз функция. Ал эми оң жак $F_\varepsilon(t)$ функциясы дагы:

$$F_\varepsilon(t)=h(t)+\left(\frac{\pi}{6\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\right)\left(\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[u_{0n}+\frac{2}{\pi}\left(\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)\right]$$

үзгүлтүксүз функция.

Демек, (4.3.13) теңдемеси үзгүлтүксүз ядросу жана үзгүлтүксүз оң жаккы функциясы болгон үчүн экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемеси, ошондуктан (4.3.13) теңдемесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз. 4.3.1 теоремасы далилденди.

4.4. Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселенин чечими жөнүндө

4.4.1. Маселенин коюлушу жана негизги жыйынтык

Төмөнкү тескери маселени карайлы: Q_T^+ областында теңдемени жана шарттарды канаттандырган

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{4.4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,+\infty), \tag{4.4.2}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.4.3}$$

$$u_x(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4.4.4}$$

$u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C\overline{Q}_T^+)$ жана $f(t) \in C_0^1([0,T])$ экилдик функцияларын табуу керек, мында $\alpha > 0 -$кичи параметр.

4.4.1 – аныктама. Эгерде $u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C(\overline{Q}_T^+),\ f(t) \in C_0^1[0,T]$ жуп функциялары классикалык мааниде (4.4.1) – (4.4.4) катанаштарын канааттандырса, анда $u(x,t)$ жана $f(t)$ жуп функциялары (4.4.1) – (4.4.4) тескери маселесинин чыгарылышы деп аталат,.

4.4.1 – теорема. Мейли $u_0(x) \in C_{M_\gamma}^2[0,+\infty)$, $g(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(1,0)}(\overline{Q}_T^+)$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$ жана $g(0,t) = 0, u_0(0) = 0, u_0'(0) = \varphi(0) = 0$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда $\gamma < 1 - T$ болгондо (4.4.1) – (4.4.4) тескери маселесинин чыгарылышы $\exists!$.

Далилдөө. (4.4.1) – (4.4.4) маселеси сызыктуу болгондуктан, анын чыгарылышын төмөнкү түрдө издөөгө болот **:**

$$(u, f) = (\vartheta, f) + (w,0),$$

мында w жана ϑ функциялары

$$\begin{aligned} &w_t = \alpha w_{xxt} + w_{xx} + g(x,t), && (x,t) \in Q_T^+, \\ &w(x,0) = u_0(x), && x \in \overline{\mathbb{R}}^+, \\ &w(0,t) = 0, && 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

жана

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_t = \alpha\vartheta_{xxt} + \vartheta_{xx}, && (x,t)\in Q_T^+,\\
&\vartheta(x,0) = 0, && x\in \overline{\mathbb{R}}^+,\\
&\vartheta(0,t) = f(t), && 0\le t\le T,\\
&\vartheta_x(0,t) = \varphi(t) - w_x(0,t), && 0\le t\le T
\end{aligned}
\tag{4.4.6}
$$

маселерин канааттандырат

Ошентип, (4.4.1) – (4.4.4) маселе боюнча бир маанилүү чечимдүүлүгү жөнүндө теореманы далилдөө үчүн төмөнкү шарттардан $u(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)\cap C(\overline{Q}_T^+)$, $f(t)\in C_0^1[0;$ экилдик функцияларын аныктоо тескери маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремасын далилдөө жетиштүү:

$$u_t = \alpha u_{xxt} + u_{xx}, \qquad (x,t)\in Q_T^+, \tag{4.4.7}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x\in \overline{\mathbb{R}}^+, \tag{4.4.8}$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4.4.9}$$

$$u_x(0,t) = \varphi(t), \qquad 0\le t\le T. \tag{4.4.10}$$

[45] ишиндеги алынган жыйынтык боюнча (4.4.7) – (4.4.9) маселесинин чыгарылышы төмөнкү формула түрүндө жазсак болот:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \int_0^\infty \left[G(x-s,t) - G(x+s,t)\right] u_0(s)ds +\\
&+\int_0^t\int_0^\infty \left[G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)\right] f(s,\tau)ds\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{4.4.11}
$$

мында

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x d\xi, \tag{4.4.12}$$

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi. \tag{4.4.13}$$

Андан кийин, $f(t)$ функциясы берилген деп эсептеп, алгач (4.4.7) – (4.4.9) түз маселени карайбыз. [45] ишиндеги (5) формуласына ылайык (4.4.7) – (4.4.9) маселенин чыгарылышы төмөнкү интегралдык формага ээ:

$$u(x,t)=e^{-\frac{x}{\alpha}}f(t)+\frac{2}{\pi}\int_0^t f(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\,d\tau. \qquad (4.4.14)$$

(4.4.14) тү x боюнча карата дифференцирлеп жана x=0 коюп жана (3.4.10) ду эске алуу менен

$$f(t)-\int_0^t K_\alpha(t,\tau)f(\tau)d\tau=-\alpha\varphi(t), \qquad (4.4.15)$$

интегралдык теңдемесин алабыз

мында

$$K_\alpha(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\alpha\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi. \qquad (4.4.16)$$

$K_\alpha(t,\tau)$ ядросунун $0<\tau<t<T$ областындаа үзгүлтүксүз экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн (4.4.16) өздүк эмес интегралынын бир калыпта жыйналышын көрсөтүү жетиштүү. Чындыгында эле,

$$\left|\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\right)\right|<\frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2},$$

болгондуктан, анда $\int_0^\infty \frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi$ өздүк эмес интегралы жыйналат. Демек, (4.4.15) интегралдык теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ. Табылган $f(t)$ функциясын (4.4.14) ко коюп, $u(x,t)$ функциясын табабыз. 4.4.1– теорема далилденди.

4.4.2 – теорема. Мейли (u_1, f_1) жана (u_2, f_2) функциялары (4.4.7) – (4.4.10) тескери маселесинин шарттарын канааттандыруучу каалаган эки экилдик функциялар болушсун жана $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ тескери маселенин тиешелүү (4.4.10) кошумча маалыматтары болсун. Анда ар кандай чектүү

T>0 үчүн баалардын аткарылышы үчүн туруктуу *C=C(T)* саны табылып төмөнкү баалоо орун алат:

$$\|f_1(t)-f_2(t)\|_{C([0,T])} \le C\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])} ,$$

$$\|u_1-u_2\|_{C(\bar{\Omega})} \le C\|\varphi_1-\varphi_2\|_{C([0,T])} .$$

4.4.2 – теореманын далилдөөсүн түздөн түз (4.4.14), (4.4.15) интегралдык теңдемелер системасынан алууга болот.

4.5. жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн бир чектик тескери маселеси жөнүндө

Дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелердин ичинен жылуулук өткөргүчтүн тендемесинин чектик тескери маселелери чоң практикалык мааниге ээ. Жылуулук өткөргүчтүн теңдемесинин чектик тескери маселелери математикалык физиканын корректүү эмес коюлган маселелери классына кирет.

Бул жерде иш жылуулук теңдемеси үчүн бир чектик тескери маселени изилдөөгө арналган. Каралып жаткан маселе туруксуз, ошондуктан аны изилдөөдө туруктуу жакындатылган чыгарылышты тургузуу жана жакындатылган чыгарылышты тактыгын баалоо маселелери негизги маселелер болуп саналат. Жакындатылган чыгарылышты А.М. Денисовдун [25] ыкмасын колдлонуу менен тургузабыз.

4.5.1. Тескери маселенин коюлушу

Мейли $u(x,t)$ функциясы баштапкы чектик маселени канааттандырсын

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1), t \in (0,T], \tag{4.5.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{4.5.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4.5.3}$$

Айталы, $\varphi(t)$ функциясы белгисиз жана (4.5.1) – (4.5.3) маселесинин чыгарылышы жөнүндө томонкудой кошумча маалымат белгилүү болсо

$$u_x(0,t) = h(t), \ 0 \le t \le T, \tag{4.5.4}$$

$\varphi(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, мында $h(t)$ – берилген функция.

Мейли $h(t)$ функциясы $h(t) \in C^2[0,T], h(0) = h^{'}(0) = 0$ болсун. Айталы, ал так берилген эмес деп болжойлу, б.а. $\delta > 0$ саны белгилүү болуп жана $h_\delta(t) \in C^2[0,T], h_\delta(0) = h_\delta^{'}(0) = 0$ үзгүлтүксүз функциясы үчүн

$$\|h_\delta(t) - h(t)\|_{L_2[0,T]} \le \delta$$

барабарсыздыгы орун алсын.

(4.5.1) – (4.5.3) маселеси металлургия, метрология тармагындагы көптөгөн процесстерде, ошондой эле жылуулук мүнөздөмөлөрү менен байланышкан материалдардын касиеттерин изилдөөдө пайда болот [5,6].

4.5.2. Тескери маселени биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеге келтирүү

$\left\{\sin \pi nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ системасы $L_2(0,1)$ мейкиндигинде базис түзгөндүктөн, (4.5.1) – (4.5.3) маселесинин ар бир классикалык чыгарылышы

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin n\pi x, \qquad (4.5.5)$$

формасына ээ, мында

$$T_n\left(t\right)=2\int_0^1 u\left(x,t\right)\sin n\pi x\, dx,\ n=1,2,\dots .$$

Анда (4.5.1) – (4.5.3) маселесине Фурье ыкмасын колдонгондон кийин $T_n(t)\ (n=1,2,...)$ функциясына карата

$$T_n'(t)+(n\pi)^2T_n(t)=(-1)^{n+1}(n\pi)\varphi(t), \qquad (4.5.6)$$

$$T_n(0)=0 \qquad (4.5.7)$$

маселесин алабыз.

(4.5.6), (4.5.7) маселенин чыгарылышы

$$T_n(t)=(-1)^n(n\pi)\int_0^t \exp\left(-(n\pi)^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau d\tau. \qquad (4.5.8)$$

функциясы болот.

(4.5.8) ти (4.5.5) ке коюп

$$u(x,t)=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n\pi)e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}\sin n\pi x\,\varphi(\tau)d\tau. \qquad (4.5.9)$$

формуласын алабыз.

(4.5.9) туюнтмасын x ке карата дифференциялдап жана (4.5.4) кошумча маалыматты колдонуп, биз алабыз

$$\int_0^t K(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = h(t), \qquad (4.5.10)$$

мында

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t}.$$

(4.5.10) интегралдык теңдемеси $\varphi(\tau)$ функциясына карата биринчи түрдөгү Вольтерранын теңдемеси болуп саналат. Мындан тышкары, $K(t-\tau)\to\infty, t\to\tau,$ жана экинчи түрдөгү теңдемеге келтируу ыкмасын колдонууга болбойт.

4.5.3. Жакындаштырылган чыгарылышты тургузуу

А.М.Денисовдун [25] ишинин ыкмасына ылайык, (10) теңдемесинин жакындаштырылган чыгарылышы катары экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесин карайбыз

$$\alpha\varphi_{\alpha\delta}(t) + \int_0^t \bar{K}(t-\tau)\varphi_{\alpha\delta}(\tau)d\tau = h_\delta(t), \qquad (4.5.11)$$

мында

$$\bar{K}(t) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(i\pi)^2 e^{-(i\pi)^2 t}.$$

Биз (4.5.11) теңдемесинин чыгарылышын $\varphi_{\alpha\delta n}(t)$ менен белгилейли.

$n = n(\delta)$ ны төмөнкүчө тандайбыз: 1) $\delta\to 0 \Rightarrow$ $n(\delta)\to 0$, 2) $\alpha\to 0,$ $\delta\to 0 \Rightarrow$ $\frac{\delta}{\alpha}n^2 \to 0$. Анда $\delta\to 0 \Rightarrow \left\|\varphi_{\alpha\delta n}(t) - \varphi(t)\right\| \to 0$.

Төмөнкү теорема орун алат.

4.5.1 – теорема. Эгерде $\varphi(t)\in C^{(2)}([0,T]),$ $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ шарттары орун алса жана δ, α, n параметрлери $\delta\to 0, \alpha\to 0, n\to\infty$ умтулса, анда $\frac{\delta}{\alpha}n^2 \to 0$ да

$$\left\|\varphi_{\alpha\delta n}(t) - \varphi(t)\right\|_{C[0,T]} \le C\left[\frac{\delta}{\alpha}n^2 + \alpha + \frac{1}{n^2}\right] \to 0,\ C - const, \qquad (4.5.12)$$

Далилдөө. Белгилөө киргизели: $z_{\alpha\delta}(t)=\varphi_{\alpha\delta n}(t)-\varphi(t)\,,\delta(t)=h_{\alpha}(t)-h(t)$.

Анда $z_{\alpha\delta}(t)$ функциясы

$$\alpha z_{\alpha\delta}(t)+\int_0^t \bar{K}(t-\tau)z_{\alpha\delta}(\tau)d\tau=\delta(t)-\alpha\varphi(t)+\psi_n(t), \qquad (4.5.13)$$

тендемесин канаттандырат,

мында

$$\psi_n(t)=\int_0^1\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n\pi)^2e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau,\ \delta(t)=h_{\delta}(t)-h(t).$$

Андан ары, [25] эмгегиндегидей сыяктуу эле, (4.5.13) теңдемесин өзгөртүп, аны

$$\alpha z_{\alpha\delta}(t)=\int_0^t \bar{K}_{\alpha}(t-\tau)z_{\alpha\delta}(\tau)d\tau+v_{\alpha}(t), \qquad (4.5.14)$$

формасында кайра жазабыз,

мында

$$\bar{K}_{\alpha}(t-\tau)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^2e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}+\frac{a_n}{\alpha^2}\int_{\tau}^{t}e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^2e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}ds+$$

$$+\frac{a_n}{\alpha}e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}=\frac{1}{\alpha}\int_{\tau}^{t}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^4e^{-(n\pi)^2(s-\tau)}e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n\pi)^3}{a_n-\alpha(n\pi)^2}\left[e^{-(n\pi)^2(s-\tau)}-e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}\right],$$

$$v_{\alpha}(t)=\frac{\delta(t)}{\alpha}-\frac{a_n}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\varphi'(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\psi_n(\tau)d\tau.$$

Мындан

$$\|v_{\alpha}(t)\|\le\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\alpha}{a_n}\|\varphi'(t)\|+\frac{1}{a_n}\|\psi_n(t)\|.$$

Эми $\psi_n(t)$ функциясын карайлы:

$$\psi_n(t)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left[(-1)^{i+1}(i\pi)^2\varphi'(t)-(-1)^{i+1}\int_0^t(i\pi)^4e^{-(i\pi)^2(t-\tau)}\varphi'(\tau)d\tau\right]=$$

$$=\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{j+1}\int_0^t(i\pi)^2e^{-(i\pi)^2(t-\tau)}\varphi''(\tau)d\tau$$

Бул функцияны баалайбыз:

$$\left\|\psi_n(t)\right\| \le \left\|\varphi''(t)\right\| \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i\pi)^2} \le \frac{1}{(n\pi)^2}\left\|\varphi''(t)\right\|.$$

Демек,

$$\left\|v_\alpha(t)\right\| \le \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\alpha}{a_n}\left\|\varphi'(t)\right\| + \frac{1}{a_n}\frac{1}{(n\pi)^2}\left\|\varphi''(t)\right\|.$$

Ар бир $t \in [0,T]$ үчүн төмөнкү интегралды баалайбыз:

$$\int_0^t \bar{K}_\alpha(t-\tau)d\tau \le 1 - \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(i\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t} \le 1 - \frac{k\pi}{a_n}e^{-(k\pi)^2 t}. \qquad (4.5.15)$$

(4.5.14) көп удаалаштыкты жакындаштыруу ыкмасын төмөнкү схема боюнча колдонобуз

$$z_{\alpha\delta}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t),$$

мында

$$z_i(t) = \int_0^t \bar{K}_\alpha(t-\tau)z_{i-1}(\tau)d\tau, \quad z_0(t) = v_\alpha(t).$$

Мындан , (4.5.15) баалоосун удаалаш колдонуп

$$\left\|z_{\alpha\delta}(t)\right\| \le \left\|v_\alpha(t)\right\|\left\{\frac{\delta}{\alpha}n^2 + \alpha + \frac{1}{n^2}\right\}$$

баалоосун алабыз.

4.5.2 теоремасы далилдендин.

4.6. жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн чектик тескери маселенин чечимдүүлүгү жөнүндө

4.6.1. Маселенин коюлушу. Жыйынтыктарды формулировкалоо

D_T аймагында төмөнкү теңдемени

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in D_T, \tag{4.6.1}$$

баштапкы шартын

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.6.2}$$

чектик шарттарды

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u_x(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4.6.3}$$

канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу баштапкы-чектик маселени карайлы.

Биз эми тескери маселени формулировкалайлы.

Мейли (4.6.1) – (4.6.3) баштапкы-чектик маселеде $u_0(x), \varphi(t)$ функциялары берилген, ал эми $f(t)$ белгисиз болсун. $f(t)$ функциясын аныктоо талап кылынсын, эгерде

$$u(x_0,t) = h(t), 0 \le t \le T \tag{4.6.4}$$

кошумча информациясы берилсе, мында $h(t)-$ берилген функция, ал эми $x_0 -$берилген сан, $x_0 \in (0,\pi)$.

4.6.1 – аныктама. $u(x,t)$ жана $f(t)$ экилдик функциялары (4.6.1) – (4.6.4) тескери маселенин чыгарылышы деп аталат, эгерде $u(x,t) \in C^{(2,1)}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T),\ f(t) \in C^1[0,T],\ f(0) = f'(0) = 0$ жана классикалык мааниде (4.6.1) – (4.6.4) барабардыктарын канааттандырса.

(4.6.1) – (4.6.3) түз маселеси боюнча жыйынтыктарды келтирели. Төмөнкү теорема орун алат.

4.6.1 – теорема. Мейли $u_0(x), \varphi(t), f(t)$ функциялары төмөнкү шарттарды канааттандырсын: $u_0(x) \in C^2[0,\pi],\ \varphi(t),\ f(t) \in C^2[0,T],$

$\varphi(0)=u_0(0)=0, \varphi'(0)=0, u_0'(\pi)=f(0)=0, \ f'(0)=0$. Анда (4.6.1) – (4.6.3) маселенин $u(x,t)\in C^{(2,1)}\left(\bar{\Omega}_T\right)\bigcap C^{(1,0)}\left(\Omega_T\right)$ чыгарылышы $\exists!$.

Бул чыгарылыш төмөнкү түргө ээ

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left\{\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)-(-1)^n f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{2n-1}{2}x.$$

Далилдөө. (4.6.1) – (4.6.3) баштапкы чектик маселеге тиешелуу Штурма-Лиувиллдин маселесин карайлы

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=X'(\pi)=0.$$

Бул маселенин өздүк маанилери жана өздүк функциялары төмөнкүчө:

$$\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{2n-1}{2}x, \ n\in\mathbb{N}.$$

Демек, (4.6.1) – (4.6.3) маселесинин чыгарылышын катар түрүндө изделет.

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right), \qquad (4.6.5)$$

мында

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx. \qquad (4.6.6)$$

(4.6.6) туюнтмасын эки жолу бөлүктөп интегралдасак

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1}\varphi(t)-\frac{4(-1)^n}{(2n-1)^2}f(t)\right]-\frac{2}{\pi}\frac{4}{(2n-1)^2}\int_0^{\pi}u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx$$

туюнтмасын алабыз.

Экинчи жагынан $T_n(t)$ функциясына карата (4.6.1) теңдемени, (4.6.2) шартты эске алып, төмөнкү маселени алабыз:

$$\begin{cases} T_n'(t)+\dfrac{(2n-1)^2}{4}T_n(t)=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{2n-1}{2}\varphi(t)-(-1)^n f(t)\right], \\ T_n(0)=u_{0n}, \end{cases} \tag{4.6.7}$$

мында

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin\frac{2n-1}{2}xdx.$$

(4.6.7) маселесинин чыгарылышы төмөкүчө аныкталат:

$$\begin{aligned} T_n(t)&=u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)+ \\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)-(-1)^n f(\tau)\right]d\tau. \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

(4.6.8) туюнтмасын (4.6.5) ке коюп, биз (4.6.1) – (4.6.3) маселесинин формалдуу чыгарылышын алабыз:

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x+ \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left\{\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)+(-1)^{n+1} f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{2n-1}{2}x. \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

Эми (4.6.9) чыгарылышын негиздөөгө өтөлү. $u_0(x)$ функциясына коюлган шарттардан

$$|u_{0n}|\le\frac{const}{(2n-1)^2} \tag{4.6.10}$$

баалоосу келип чыгат.

Ал эми бардык $t\ge 0$ үчүн $0<\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\le 1$ болгондуктан

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x$$

катары D_T аймагында бир калыпта жана абсолюттуу жыйналат.

Мындан тышкары

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x \qquad (4.6.11)$$

катары дагы D_T аймагында бир калыпта жана абсолюттуу жыйналат.

t боюнча бир жолу же x боюнча эки жолу дифференциациялоодон алынган катарлар да D_T аймагында бир калыпта жана абсолюттуу жыйналат. Бул ырастоо

$$0<\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)<1$$

барабарсыздыгынан келип чыгат

Мындан ары (4.6.9) катарынын экинчи кошулуучусунун жыйналуучулугун көрсөтөбүз.

Шарт боюнча $\varphi(t)\in C^2[0,T],\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0$ болгондуктан, бөлүктөп интегралдагандан кийин, биз төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{2n-1}{2}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau=\frac{2}{2n-1}\varphi(t)-$$

$$-\frac{2}{2n-1}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\varphi'(\tau)d\tau.$$

Эми

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4},\ 0<x<\pi,\\ 0,\quad x=0,\ x=\pi,\end{cases}$$

экендигин эске алып, акыркы туюнтмадан биз алабыз:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}\left[\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\right]\sin\frac{2n-1}{2}x=\frac{\varphi(t)}{2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\left[\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\varphi''(\tau)d\tau\right]\sin\frac{2n-1}{2}x. \qquad (4.6.12)$$

Ушундай эле ыкма менен , биз алабыз:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau\sin\frac{2n-1}{2}x=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[f(t)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\sin\frac{2n-1}{2}x\right]- \qquad (4.6.13)$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)f'(\tau)d\tau\sin\frac{2n-1}{2}x.$$

Вейерштрасс критерийи боюнча $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ катарынын жана (4.6.12), (4.6.13) формулаларынан $\bar{D}_T$ аймагындагы (4.6.9) катарынын экинчи мүчөсүнүн жыйналуучулугу келип чыгат.

Ошо сыяктуу эле, тиешелүү $u_t(x,t), u_{xx}(x,t)$ туундуларынын жыйналуучулугун көрсөтүүгө болот. 4.6..1 теоремасы далилденди.

Эми (4.6.1) – (4.6.4) тескери маселесин изилдөөгө өтөлү.

4.6.2. Маселени биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеге келтирүү

4.6.2 – теорема. Мейли $u_0(x), \varphi(t)$ функциялары 4.6.1-теоремасынын шарттарын канааттандырсын. Мындан тышкары, $h(t)\in C^1[0,T], h(0)=u_0(x_0)$. Анда (4.6.1) – (4.6.4) тескери маселесинин $u(x,t)\in C^{(2,1)}(D_T)\cap C^{(1,0)}(\bar{D}_T)$, $f(t)\in C_0^1[0,T],$ жалгыз чыгарылышы жашайт.

Мейли $f(t)$ функциясы (4.6.1) – (4.6.4) тескери маселенин чыгарылышы болсун деп эсептейли. Тескери маселени интегралдык теңдемеге келтирүү үчүн (4.6.1) – (4.6.3) баштапкы-чектик маселесинин табылган чыгарылышын колдонобуз.

Грин функциясын киргизели

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\xi,$$

жана табылган чыгарылышты Гриндин функциясы аркылуу жазалы

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\{\varphi(\tau)H_1(x,t-\tau)+f(\tau)H_2(x,t-\tau)\}d\tau, \qquad (4.6.14)$$

мында

$$H_1(x,t)=\left[\frac{\partial G(x,\xi,t)}{\partial \xi}\right]_{\xi=0}, \quad H_2(x,\pi,t)=G(x,\pi,t).$$

Чагылдыруу ыкмасын колдонуу менен Гриндин $G(x,\xi,t)$ функциясын башка формада кайра жазабыз [57, б.59]:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]\right\}=$$

$$=K(x-\xi,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\{K(x-\xi+2n\pi,t)+K(x+\xi+2n\pi,t)\},$$

мында

$$K(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Ыңгайлуулук үчүн (4.6.14) тү кайра төмөнкүчө жазабыз

$$u(x,t)=\vartheta(x,t)-\int_0^t f(\tau)H_2(x,t-\tau)d\tau, \qquad (4.6.15)$$

мында

$$\vartheta(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\varphi(\tau)H_1(x,t-\tau)d\tau.$$

(4.6.15) ке $x=x_0$ ду коюп, (4.6.4) шартын колдонуп, биз төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\int_0^t H_2(x_0,t-\tau)f(\tau)d\tau=F(t), \qquad (4.6.16)$$

мында

$$F(t)=h(t)-\vartheta(x_0,t).$$

$h(t)$ функциясына карата төмөнкү шарттар аткарылды дейли:

$$h(t)\in C^1[0,T],\, h(0)=u_0(x_0).$$

$h(t), \varphi(t), u_0(x)$ функцияларына коюлган шарттардын аркасында $F(t)$ функциясы үзгүлтүксүз дифференцирлөөнүүчү функция болуп саналат.

$H_2(x_0,t-\tau)$ функциясын төмөнкүчө жазууга болот:

$$H_2(x_0,t-\tau)=(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}G_0(x_0,t-\tau),$$

мында $G_0(x_0,t-\tau)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right)$- жетишерлик жылмакай функция.

(4.6.16) интегралдык теңдемеси изделүүчү $f(t)$ функциясына карата биринчи түрдөгү Абел тибиндеги теңдеме. Ал жалгыз так чыгарылышка ээ жана анын айкын чыгарылышын төмөнкүчө тапсак болот.

1/2 даражадагы бөлчөк дифференциациялоо операторун төмөнкү формула менен аныктайбыз:

$$(D^{1/2}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x\frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1/2}}=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(s)ds}{(x-s)^{1/2}} \qquad (4.6.17)$$

Ал эми

$$\int_\xi^x (x-s)^{-1/2}(s-\xi)^{1/2-1}ds=\Gamma^2(1/2)$$

анда (4.6.16) теңдемесинин эки бөлүгүнө тең $D^{1/2}$ операторду колдонгондон кийин, биз

$$f(t)+\int_0^t K_1(t,\tau)f(\tau)d\tau=h_2(t), \qquad (4.6.18)$$

экинчи түрдөгү Вольтерранын тендемесин алабыз, мында $h_2(t)=D^{1/2}h_1(t),$ ал эми $K_1(t,\tau)$ үзгүлтүксүз ядросу $G_0(x_0,t-\tau)$ функциясы аркылуу туюндурулат. Экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын касиеттеринен теореманын бекитилишин жыйынтыктайбыз.Табылган $f(t)$ функциясын (4.6.15) ке коюп, $u(x,t)$ функциясын алабыз. 4.6.2- теорема далилденди.

4.7. Экинчи түрдөгү чектик шарттарында тескери убакыттагы корректүү эмес коюлган жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн квазиинверсия ыкмасы

Белгилүү акыркы убакта $t = T$ маалыматтар $u(x,t)$ температуранын бөлүштүрүлүшүнөн биз $t < T$ болгон мурунку убактагы температуранын бөлүштүрүлүшүн табышыбыз керек. Бул маселе тескери убактагы жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн Коши маселеси деп аталат. Белгилүү болгондой, бул маселе Адамардын маанисинде корректүү эмес коюлган; башкача айтканда, чыгарылыштар дайыма эле жашай бербейт жана алар жашаган учурда, алар берилген маалыматтарга үзгүлтүксүз көз каранды болбойт, б.а.баштапкы маалыматтардын кичине өзгөрүүсүнө, тиешелүү $u(x,t)$ чыгарылышынын чоң өзгөрүүсү туура келиши мүмкүн.

Ошондуктан бул маселе ар кандай регуляризациялоо ыкмаларын колдонуу менен чечилет. Алардын бири Лионстун ыкмасы [37], ал квазиинверсиялоо ыкма деп аталат. Квазиинверсия ыкмасы баштапкы теңдемени козгоодон турат жана ал колдонулганда теңдеменин дифференциалдык формасы сакталат. Башкача айтканда, каралган маселе корректуу коюлган маселелердин үй-бүлөсү менен алмаштырылат жана анын чыгарылышы белгилүү шарттарда баштапкы маселенин чыгарылышына жакындайт. Квазинверсия ыкмасын биринчи жолу убакыттын тескери агымы менен жылуулук теңдемесин чыгарууда француз окумуштуусу Р.Лионс колдонгон, андан ары бул ыкма [5-7] иштеринде өнүктүрүлгөн.

Жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн тескери маселелер боюнча көптөгөн илимий иштер бар, алардын көбү бир тектүү учурга арналган, ал эми бир тектүү эмес учурлар боюнча адабияттар дээрлик жокко эсе. Бул макалада биз бир тектүү эмес учурдагы экинчи түрдөгү чектик шарттары менен жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн тескери маселени карайбыз.

4.7.1.Тескери убакыттагы Коши маселесинин коюлушу анын бир маанилүү чыгарымдуулугу

D_T тик бурчтугунда төмөнкү шарртарды канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу талап кылынсын:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T \tag{4.7.1}$$

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4.7.2}$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.7.3}$$

Мында $\varphi(x)$, $f(x,t)$ – берилген функциялар.

4.7.1 – теорема. Мейли $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$, $f(x,t) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$ жана $\varphi'(0) = 0, \varphi'(\pi) = 0$ макулдашуу шарттары жана

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2 s} f_k(s) ds \right] < +\infty$$

барабарсыздыгы аткарылсын.

Анда (4.7.1) – (4.7.3) маселесинин чыгарылышы $\exists!$ жана ал

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_k e^{k^2(T-t)} - \int_t^T e^{-k^2(t-s)} f_k(s) ds \right] \cos kx \tag{4.7.4}$$

формуласы менен берилет.

Мында

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi} < \varphi(x), \cos kx > = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx, \; k = 0,1,2,...,$$

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} < f(x,t), \sin kx > = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, f(x,t) dx, \; k = 0,1,2,...,$$

ал эми $< \cdot, \cdot >$ – $L_2(0,\pi)$ мейкиндигиндеги скалярдык көбөйтүү.

Далилдөө. (4.7.1) – (4.7.3) маселесинин чыгарылышын төмөнкү формада издейбиз:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos kx, \qquad (4.7.5)$$

мында

$$u_k(t)=\frac{2}{\pi}(u(x,t),\cos kx)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,t)\cos kxdx, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

$\varphi(x)$, $f(x,t)$ функцияларын Фурье катарына ажыратабыз:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cos kx, \quad \varphi_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos kxdx, \quad k=0,1,2,\ldots \quad ,$$

$$f(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(t)\cos kx,\ f_k(t)==\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x,t)coskxdx, \quad k=0,1,2,\ldots \quad .$$

Анда (4.7.1) – (4.7.3) маселесине Фурье ыкмасын формалдуу түрдө колдонуп

$$\begin{cases} u_0^{'}(t)=\dfrac{f_0(t)}{2}\pi, \\ u_0(T)=\dfrac{\varphi_k}{2}, \end{cases} \quad k=0, \qquad (4.7.6)$$

$$\begin{cases} u_{kt}(t)+k^2u_k(t)=f_k(t), \\ u_k(T)=\varphi_k \end{cases}, \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (4.7.7)$$

маселелерин алабыз.

(4.7.6),(4.7.7) маселелеринин чыгарылышы болуп

$$u_0(t)=\frac{\varphi_0}{2}-\int_t^T f_0(s)ds, k=0, \qquad (4.7.8)$$

$$u_k=\varphi_k e^{k^2(T-t)}-\int_t^T e^{-k^2(t-s)}f_k(s)ds, k\in\mathbb{N} \qquad (4.7.9)$$

функциялары саналат. (4.7.8),(4.7.9) дарды (4.7.5) ке коюп (4.7.4) формуласын алабыз.

(4.7.4) формуласынан (4.7.1) – (4.7.3) маселесин чыгарылышынын жалгыздыгы жана Адамардын мисалы келип чыгат.

Мейли (4.7.1) – (4.7.3) маселесинде $f(x,t)=0$ и $\varphi(x)=\frac{1}{n}\cos nx$. Анда (4.7.1) – (4.7.3) маселеси

$$u_n(x,t)=\frac{1}{n}\cos nxe^{n^2(T-t)}$$

формуласы менен аныкталган жалгыз чыгарылышка ээ.

Бирок, $\varphi(x)=\frac{1}{n}\cos nx$ үчүн $u_n(x,t)=\frac{1}{n}\cos nxe^{n^2(T-t)}$ чыгарылышы n өскөн сайын чексиз өсөт, ал эми $n\to\infty$ да $\varphi(x)=\frac{1}{n}\cos nx$ нөлгө умтулат. Ошентип, жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн тескери убакыттагы Коши маселеси корректүү эмес коюлгандыгын аныктадык.

4.7.2. Регуляризациялоо жана каталарды баалоо.

Биз псевдопараболалык регуляризацияны колдонобуз, ал (4.7.1) – (4.7.3) маселесин төмөнкү маселе менен алмаштыруудан турат:

$$v_{\varepsilon t}-v_{\varepsilon xx}-\varepsilon v_{\varepsilon xxt}=f(x,t),\qquad 0<x<\pi,\quad 0<t<T \qquad (4.7.10)$$

$$v_{\varepsilon}(x,T)=\varphi(x),\quad 0\le x\le\pi, \qquad (4.7.11)$$

$$v_{\varepsilon x}(0,t)=v_{\varepsilon x}(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le T, \qquad (4.7.12)$$

мында $\varepsilon>0$ – кичи параметр.

Төмөнкүдөй суроолор жаралат:

1) Ар бири $\varepsilon>0$ үчүн (4.7.10) – (4.7.12) маселенин жалгыз чыгарылышы жашайбы жана ал берилген функциялардан үзгүлтүксүз көз карандыбы;

2) (4.7.10) – (4.7.12) маселесинин чыгарылышы $\varepsilon\to 0$ да (4.7.1) – (4.7.3) маселесинин чыгарылышына умтулабы (эгерде ал жашаса)?

3) (4.7.10) – (4.7.12) маселесин жакындаштырып чыгаруунун конструктивдүү ыкмалары барбы?

Биринчи суроого төмөнкү теорема жооп берет.

4.7.2 – теорема. Мейли $\varphi(x)$, $f(x,t)$ функциялары үчүн 1-теореманын шарттары аткарылсын.Анда (4.7.10) – (4.7.12) маселесинин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана

$$\|v_\varepsilon(x,t)\|_{L_2} \le e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}\|\varphi(x)\|_{L_2} + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)} - 1\right)\|f\|_{L_2}^2. \qquad (4.7.13)$$

баалоосун канааттандырат.

Далилдөө. Жогорудагыдай эле (4.7.10) – (4.7.12) маселенин чыгарылышы төмөнкү формада издейбиз:

$$v_\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\cos kx, \qquad (4.7.14)$$

мында

$$v_{\varepsilon k}(t) = \frac{2}{\pi}(v_\varepsilon(x,t), \cos kx) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_\varepsilon(x,t)\cos kx dx, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Анда (4.7.10) – (4.7.12) маселесине Фурье ыкмасын формалдуу түрдө колдонуп

$$\begin{cases} v'_{\varepsilon 0}(t) = \dfrac{f_0(t)}{2} \\ v_{\varepsilon 0}(T) = \dfrac{\varphi_0}{2} \end{cases} \pi, \qquad k = 0, \qquad (4.7.15)$$

$$\begin{cases} v_{\varepsilon kt}(t) + \dfrac{k^2}{1+\varepsilon k^2} v_{\varepsilon k}(t) = \dfrac{1}{1+\varepsilon k^2} f_k(t), \\ v_{\varepsilon k}(T) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \qquad (4.7.16)$$

маселесин алабыз.

(4.7.15),(4.7.16) маселелерин чыгарып

$$v_{\varepsilon 0}(t) = \frac{\varphi_0}{2} - \int_t^T f_0(s)ds, k = 0, \qquad (4.7.17)$$

$$v_{\varepsilon k}(t)=\varphi_k e^{\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)}-\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}f_k(s)ds,\quad k\in\mathbb{N} \quad (4.7.18)$$

функцияларын алабыз.

Анда (4.7.17), (4.7.18) ти (4.7.14) ке коюп, (4.7.10) – (4.7.12) маселесинин чыгарылышы $v_\varepsilon(x,t)$ функциясын алабыз:

$$v_\varepsilon(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)}-\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}f_k(s)ds\right]\cos kx. \quad (4.7.19)$$

Эми (4.7.10) – (4.7.12) маселенин чыгарылышынын туруктуулугуна токтололу. Ал эми

$$\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}\le\frac{1}{\varepsilon}$$

болгондуктан, (4.7.19) барабардыгынан

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_k|^2\exp\left(\frac{2k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\le\exp\left(\frac{2}{\varepsilon}(T-t)\right)\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2=\exp\left(\frac{2}{\varepsilon}(T-t)\right)\|\varphi\|^2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right]^2\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{\frac{2}{\varepsilon}(\tau-t)}d\tau\int_t^T|f_k(\tau)|^2d\tau\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\pi\left(1+\varepsilon k^2\right)}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\int_t^T|f_k(\tau)|^2d\tau\le\frac{1}{\pi}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\int_0^T\int_0^\pi|f(s,\tau)|^2dsd\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\|f\|_{L_2}^2.$$

Бул барабарсыздыктардан (4.7.13) баалоосун алабыз.

Ошентип, баштапкы шарттарга карата (4.7.10) – (4.7.12) маселесинин чыгарылыштарынын туруктуулугун мүнөздөгөн (4.7.13) баалоосун алдык. Демек, (4.7.10) – (4.7.12) маселеси $\varepsilon>0$ үчүн Адамардын маанисинде корректүү коюлган. Эми 2 – чи жана 3 – чү суроолордун жообуна кайрылалы.

Эми биз регуляризациялоо жана каталарды баалоону жүргүзөлү.

Биздин максат

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{\pi}\left|v_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\right|^2 dx=0 \qquad (4.7.20)$$

барабардыгын далилдөө.

(4.7.20) барабардыгы φ жана f функциялары $t\in[0,T]$ үчүн Фурье коэффициенттери

$$\varphi_k \exp\left(k^2T\right)\le C \text{ жана } \int_t^T e^{-2k^2(t-s)} f_k^2(\tau)d\tau \le C$$

шарттарын канаттандырганда орун аларын көрсөтөбүз.

Ошондуктан $0\le t\le T$ үчүн төмөнкү сумманы баалоо керек:

$$B_\varepsilon(x,t)=B_\varepsilon(x,t,\varphi)+B_\varepsilon(x,t,f)=v_\varepsilon(x,t)-u(x,t)=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\left[\exp\left(k^2(T-t)\right)-\exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]+ \qquad 4.7.21)$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T\left(e^{-k^2t-s)}-\frac{e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)f_k(\tau)d\tau\right]\cos kx.$$

Ал эми

$$\varphi_k\left[\exp\left(k^2(T-t)\right)-\exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]$$

туюнтмасы

$$\varphi_k \exp\left(k^2T\right)\le C,$$

шарты аткарылганда

$$C\exp\left(-k^2T\right)\left[\exp\left(k^2(T-t)\right)-\exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]=$$

$$=C\exp\left(-k^2t\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right],$$

функциясынан ашпайт. Ошол эле сыяктуу

$$\int_t^T e^{-2k^2(t-s)} f_k^2(\tau)d\tau \le C$$

орун алганда

$$\int_t^T e^{-2k^2(t-s)} \left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 f_k^2(\tau)d\tau \le C\int_t^T \left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 d\tau.$$

Анда (4.3.20) туюнтмасынын биринчи, экинчи суммаларын төмөнкүчө бааласак болот:

$$\|B_\varepsilon(x,t,\varphi)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\left[\exp\left(k^2(T-t)\right)-\exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\exp\left(-2k^2t\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right)^{1/2}. \qquad (4.7.22)$$

$$|B_\varepsilon(x,t,f)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T\left(e^{-k^2(t-s)}-\frac{e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)f_k(\tau)d\tau\right]\cos kx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T e^{-2k^2(t-s)}\left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 f_k^2(\tau)d\tau\right] \le \qquad (4.7.23)$$

$$\le \int_t^T e^{-2k^2(t-s)} f_k^2(\tau)d\tau \int_t^T \left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 d\tau \le C\int_t^T \left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 d\tau.$$

(4.7.1) – (4.7.3) маселеси Тихонов боюнча корректүү коюлган, ал эми ***M*** корректүүлүк көптүгү

$$\left\{\int_0^{\pi} u^2(x,0)dx\right\}^{1/2} \le C \qquad (4.7.24)$$

барабарсыздыгы менен аныкталат деп алалы.

(4.7.1) – (4.7.3) маселенин $v(x,t)$ так чыгарылышынан $v_\varepsilon(x,t)$ функциясынан четтөөсунун маанисин (4.7.21) шарты же

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2 \exp 2\left(k^2T\right)\le C.$$

шарты менен баалайлы.

Анда

$$\|v_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|\le\|B_\varepsilon(x,t,\varphi)\|+\|B_\varepsilon(x,t,f)\|\le$$

$$\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\left[\exp\left(k^2(T-t)\right)-\exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right\}^{1/2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T e^{-2k^2(t-s)}\left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 f_k^2(\tau)d\tau\right]d\tau\le \qquad (4.7.25)$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\exp\left(-2k^2t\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right)^{1/2}+$$

$$+C\int_t^T\left(1-\frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 d\tau.$$

(4.7.25) ден (4.7.10) – (4.7.12) регуляризацияланган маселенин чыгарылышы $v_\varepsilon(x,t)$ да $\varepsilon\to 0$ (4.7.1)-(4.7.3) маселесинин $u(x,t)$ так чыгарылышына умтулат.

Төртүнчү глава боюнча корутунду

Бул главада 3 – тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелер жана анын параболалык теңдеме үчүн тескери маселелерге колдонулушу каралды. 4 – главанын 1 – бөлүмүндө псевдопараболалык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселесинен чектик шартты аныктоо тескери маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу жөнүндөгү теорема далилденди.

4.2 – чи бөлүмдө үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы-чектик маселесинен интегралдык кайра аныктоо кошумча шарты менен берилген чектик шартты аныктоо тескери маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугунун жетиштүү шарттары табылды.

4.3 – чү бөлүмдө үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн кесиндинин ички чекиттеги кошумча шарты менен берилген чектик тескери маселесиин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары аныкталган.

4.4 – чү бөлүмдө үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн жарым октогу Коши маселесинен чектик шартты аныктоо тескери маселесинин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылган.

4.5 – чи бөлүмдө жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн чектик тескери маселе каралган. Бул маселе үчүн А.М.Денисовдун регуляризациялоо ыкмасын колдонуп жакындаштырылган чыгарылышы тургузулган.

4.6 – чы бөлүмдө жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн бир чектик тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденген.

4.7 – чи бөлүмдө тескери убакыттагы Коши маселесинин бир маанилүү чыгарымдуулугу изилденген жана квазиинверсия ыкмасы менен анын регуляризацияланган чыгарылышы аныкталган.

Корутунду

Диссертациялык иште кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселелердин бир маанилүү чыгарымдуулугу боюнча суроолор изилденип, төмөнкүдөй жыйынтыктар алынган:

1) Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн түз (баштапкы жана баштапкы-чектик) маселелердин чыгарымдуулугу үчүн жетиштүү шарттары табылды жана тиешелүү айкын чыгарылыштары алынды;

2) үчүнчү даражадагы псевдопараболалык теңдеме үчүн ар кандай кошумча шарттары бар чек ара тескери маселелердин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын камсыз кылуучу жетиштүү шарттар табылды;

3) ар кандай кошумча шарттары бар псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылышынын жащашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденди;

4) жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн чектик тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденди;

5) А.М.Денисовдун регуляризациялоо ыкмасын колдонуу менен жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн бир чектик тескери маселенин жакындаштырылган чыгарылышы тургузулду;

6) Тескери убакытагы жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн корректүү эмес коюлган Коши маселеси квазинверсия ыкмасы менен изилденди.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертациялык иш теориялык мүнөзгө ээ жана анын жыйынтыктарын жогорку тартиптеги С.Л.Соболев тибиндеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге коюлган чектик тескери маселелер теориясын өнүктүрүүдө колдонсок болот. Мындан тышкары, конкретүү прикладдык маселелерди, тактап айтсак, фильтрация теориясындагы чектик тескери маселелерди чыгарууда колдонууга болот. Диссертациялык иштин изилдөө ыкмалары тиешелүү түз маселелердин айкын чыгарылыштарына негизделген. Демек, алынган илимий жыйынтыктар жогорку тартиптеги Соболев тибиндеги теңдемелер үчүн коюлган түз (Коши, баштапкы-чектик) маселелердин аналитикалык чыгарылышын тургузууга жана алардын теориясынын өнүгүшүнө салымын кошот деп ойлойбуз. Алынган жыйынтыктарды фильтрация теориясындагы чектик тескери маселелер үчүн колдонууга сунуштайбыз.

.

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАРДЫН ТИЗМЕСИ

1. Аблабеков, Б. С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики [Текст]: учеб. пособие / Б. С. Аблабеков. – Бишкек: КГНУ, 1997. – 184 с.

2. Аблабеков, Б. С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи [Текст] / Б. С. Аблабеков // Наука и новые технологии. – 1999. – № 4. – С. 12–19.

3. Аблабеков, Б. С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б. С. Аблабеков. – Бишкек: Илим, 2001. – 183 с.

4. Аблабеков, Б. С. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. К. Курманбаева // Изв. Кырг. гос. техн. ун-та им. И. Раззакова. – 2011. – № 22. – С. 235–239.

5. Аблабеков, Б. С. Граничная обратная задача для уравнения фильтрации жидкостей в трещиноватом пласте [Текст] / Б. С. Аблабеков // Изв. Кырг. гос. техн. ун-та им. И. Раззакова. – 2013. – № 28. – С. 449–452.

6. Аблабеков, Б. С. Граничная обратная задача для псевдопараболического уравнения и ее применение к граничной обратной задаче теплопроводности [Текст] / Б. С. Аблабеков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2000. – Вып. 29. – С. 286–293.

7. Аниконов, Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений [Текст] / Ю. Е. Аниконов. – Новосибирск: Наука, 1978. – 118 с.

8. Атаманов, Э. Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Э. Р. Атаманов, О. Ш. Мамаюсупов. – Фрунзе: Илим, 1990. – 101 с.

9. Асанов, А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения [Текст] / А. Асанов, Э. Р. Атаманов // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 752–761.

10. Баренблатт, Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации
жидкости в трещиноватых породах [Текст] / Г. И. Баренблатт // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 2. – С. 348–350.
11. Баренблатт, Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах [Текст] / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
12. Безнощенко, Н. Я. Обратные задачи для уравнений параболического типа [Текст] / Н. Я. Безнощенко, А. И. Прилепко // Проблемы мат. физики и вычисл.
математики. – М., 1977. – С. 51–63.
13. Безнощенко, Н. Я. Об определении коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении [Текст] / Н. Я. Безнощенко // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16, № 3. – С. 473–482.
14. Безнощенко, Н. Я. Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения [Текст] / Н. Я. Безнощенко // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19,
№ 11. – С. 1908–1915.
15. Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для полулинейного параболического уравнения [Текст] / Ю. Я. Белов // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 5. – С. 1034–1038.
16. Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестными коэффициентами при производных по времени [Текст] / Ю. Я. Белов, Е. Г. Саватеев // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 5. – С. 800–804.
17. Бойков, И. В. Об одном методе восстановления граничного условия для линейных уравнений параболического типа [Текст] / И. В. Бойков, В. А.

Рязанцев // Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 42–56. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-4.
18. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи [Текст] / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
19. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач [Текст] / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1988. – 183 с.
20. Вабищевич, П. Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности [Текст] / П. Н. Вабищевич // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1193–1199.
21. Вабищевич, П. Н. Разностные методы решения граничной обратной задачи
теплопроводности [Текст] / П. Н. Вабищевич // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1114–1123.
22. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики [Текст] / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 528 с.
23. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст]
/ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: ФМЛ, 1963. – 1100 с.
24. Дворкин, Л. Б. К теории конвективной диффузии солей в пористых средах
[Текст] / Л. Б. Дворкин // Журн. физ. химии. – 1968. – Т. 42, № 4. – С. 948–956.
25. Денисов, А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / А. М. Денисов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1975. – Т. 15, № 4. – С. 1053–1056.
26. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач [Текст] / А. М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.
27. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и их приложения [Текст] / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
28. Кабанихин, С. И. Проекционно-разностные методы определения

коэффициентов гиперболических уравнений [Текст] / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
29. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи [Текст] / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
30. Кабанихин, С. И. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач [Текст] / С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков. – Новосибирск: НГУ,
2001. – 315 с.
31. Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи [Текст] / А. И. Кожанов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694–716.
32. Кожанов, А. И. Обратные задачи определения граничных режимов для некоторых уравнений соболевского типа [Текст] / А. И. Кожанов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, вып. 2. – С. 37–45.
33. Костин, А. Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения I [Текст] / А. Б. Костин, А. И. Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 107–116.
34. Костин, А. Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения II [Текст] / А. Б. Костин, А. И. Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 1519–1528.
35. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа
[Текст] / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
36. Лаврентьев, М. М. Линейные операторы и некорректные задачи [Текст] / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – М.: Наука, 1991. – 330 с.
37. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложение [Текст] / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

38. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач [Текст] / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
39. Масленникова, В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В. Н. Масленникова. – М.: РУДН, 1997. – 447 с.
40. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
41. Аблабеков, Б. С. Об одной граничной обратной задаче для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: сб. тез. 10-й междунар. молодеж. науч. шк.-конф., Новосибирск, 10-13 окт. 2018 г. – Новосибирск, 2018. – С. 11.
42. Аблабеков, Б. С. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 3. – С. 41–47.
43. Аблабеков, Б. С. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – 2019. – Т. 1, № 4 (50). – С. 1–5.
44. Аблабеков, Б. С. О одной граничной обратной задаче для уравнения теплопроводности [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., 26-29 сент., 2019 г. / под общ. ред. Т. Н. Можаровой. – Орел, 2019. – С. 14–18.
45. Аблабеков, Б. С. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Вестн. КРАУНЦ (Камчат. регион. ассоц. Учеб. -науч. центр). Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 32, № 3. – С. 29–41. – DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.

46. Аблабеков, Б. С. О разрешимости граничной обратной задачи для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – 2021. – Т. 1. – № 7 (77). – С. 5 –8.
47. Муканбетова, А. Т. Граничная обратная задача с интегральным переопределением для псевдопараболического уравнения [Текст] / А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – 2021. – Т. 1, № 10 (80). – С. 25–27.
48. Аблабеков, Б. С. Граничная обратная задача для псевдопараболического уравнения в случае второй начально-краевой задачи [Текст] / Б. С. Аблабеков,
А. Т. Муканбетова // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., 18-21 нояб., 2021 г. / под общ. ред. Т. Н. Можаровой. – Орел, 2021. – С. 16–21.
49. Аблабеков, Б. С. Кичи параметрлүү псевдопараболалык тендеме үчүн аралаш түрдөгү чектик маселенин чечими жөнүндө [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Изв. вузов Кыргызстана. – 2021. – № 5. – С. 3–9.
50. Аблабеков, Б. С. О разрешимости граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Вестн. Кырг. гос. ун-та стр-ва, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова. – 2021. – № 4 (74). – С. 670–676.
51. Аблабеков, Б. С. Кичи параметрлүү псевдопараболалык тендеме үчүн чектик тескери маселенин чечими жөнүндө [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2022. – № 4. – С. 13–16.
52. Аблабеков, Б. С. Корректүү эмес коюлган жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн тескери убакыттагы Коши маселесин квазиинверсия ыкмасы менен регуляризациялоо [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука,
новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2022. – № 6. – С. 7–11.

53. Mukanbetova, A. T. On the solvability of a boundary inverse problem for pseudoparabolic equation [Text] / A. T. Mukanbetova // Problems of Modern Mathematics: 70th anniversary of A. A. Borubaev, June 16-18, 2021. – Bishkek, 2021. – P. 98.
54. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
55. Нахушев, А. М. Уравнение математической биологии [Текст] / А. М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
56. Полубарина-Кочина, П. Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П. Я. Полубарина-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
57. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит: Наука, 2001. – 575 с.
58. Прилепко, А. И. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением [Текст] / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Мат. сборник. – 1992. – Т. 183, № 4. – С. 49–68.
59. Прилепко, А. И. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении [Текст] / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Сиб. мат.
журн. – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 146–155.
60. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В. Г. Романов. – М.: Наука, 1984. – 254 с.
61. Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах [Текст] / В. Г. Романов. – М.: Науч. мир, 2005. – 296 с.
62. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике [Текст] / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов. – М.: МГУ, 1993. – 352 с.
63. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа [Текст] / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

64. Сергеев, В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / В. О. Сергеев // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 197, № 3. – С. 531–534.
65. Солодуша, С. В. Применение численных методов для уравнений Вольтерра
I рода, возникающих в обратной граничной задаче теплопроводности [Текст] / С. В. Солодуша // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2015. – Т. 11. – С. 96–105.
66. Солодуша, С. В. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода [Текст] / С. В. Солодуша, Н. М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 327–335.
67. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации [Текст] / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
68. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач [Текст] / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
69. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
70. Щеглов, А. Ю. Метод приближенного решения одной обратной задачи для
уравнения теплопроводности [Текст] / А. Ю. Щеглов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 904–916.
71. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [Текст] / М. К. Шхануков // Дифференц. уравнения. – 1982. –
Т. 18, № 4. – С. 689–699.
72. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экспериментальных свойствах его решений [Текст] / М. Х. Шхануков // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 145–

152.
73. Шхануков, М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений
третьего порядка [Текст]: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / М. Х. Шхануков. – М., 1985. – 225 с.
74. Чудновский, А. Ф. Теплофизика почвы [Текст] / А. Ф. Чудновский. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
75. Яхно, В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости
[Текст] / В. Г. Яхно. – Новосибирск: Наука, 1990. – 301 с.
76. Anikonov, Yu. E. Multidimensional inverse and ill – posed problems for differential equations [Text] / Yu. E. Anikonov. – Utrecht: VSP, 1995. – 134 p.
77. Asanov, A. Nonclassical and invers problems for pseudo-parabolic equations [Text] / A. Asanov, E. R. Atamanov. – Tokyo: [s. n.], 1997. – 152 p.
78. Asanov, A. Regularzation, uniquiness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind [Text] / A. Asanov. – Utrecht: VSP, 1998. – 276 p.
79. Cannon, J. R. Classical and weak solutions for one-dimensional pseudo-parabolic equations with typical boundary data [Text] / J. R. Cannon, Y. Ling // SIAM J. Math. Anal. – 1987. – Vol. 18, N 2. – P. 375–385.
80. Colton, D. Pseudo-parabolic equations in one spase variable [Text] / D. Colton // J. Different. Equat. – 1972. – Vol. 12, N 3. – P. 559–565.
81. Colton, D. Oh the analytic theory of pseudo-parabolic equations [Text] / D. Colton // Quart. J. Math. – 1972. – Vol. 23. – P. 179–192.
82. Colton, D. Analytic theory for partial differential equations [Text] / D. Colton. –
London: Pitman Publ., 1980. – 239 p.
83. Colton, D. The Approximation of Solutions to the Backwards Heat Equation in a Nonhomogeneous Medium [Text] / D. Colton // J. Math. Anal. Appl. –1979. – Vol. 72. – P. 418–429.

84. Ewing, R. E. The aproximations of certain parabolic equations backward in time
by Sobolev equations [Text] / R. E. Ewing // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – Vol. 6, N 2. – P. 283–294.
85. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical fhysics [Text] / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, U. A. Vasin. – New York; Basel: Marcelker,
1999. – 709 p.
86. Romanov, V. G. Investigation methods for inverse problems [Text] / V. G. Romanov. – Utrecht: VSP, 2002. – 280 p.
87. Rundell, W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary date [Text] / W. Rundell //
Appl. Anal. – 1980. – Vol. 10, N 2. – P. 231–242.
88. Showalter, R. E. Final value problem for evolut1on equations [Text] / R. E. Showalter // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – Vol. 47. – P. 563–572.
89. Showalter, R. Pseudo parabolic partial differential equations [Text] / R. Showalter, T. W. Ting // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – Vol. 1, N 1. – P. 1–26.
90. Ting, T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations [Text] / T. W. Ting // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – Vol. 21, N 3. – P. 440–453.
91. A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate[Text] / D. D. Trong, P. H. Quan, T. Vu. Khanh, N. H. Tuan // Z. Anal. Anwend. – 2007. – Vol. 26, N 2. – P. 231–245.
92. Yangarber, V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation [Text] / V. A. Yangarber // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – Vol. 8, N 1. – P. 62–64.