УДК: 517
DOI 10.33514/1694-7851-2025-4/2-79-86

Солтонкулова Ж.М.
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
soltonkulova77@mail.ru
Өгөнова А.
студент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
aiperiozgonovaa@gmail.com
Нурбекова Н.Н.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
nurbekova381@gmail.com

ПАРАМЕТР КИРГИЗҮҮНҮН ЖАЛПЫ МЕТОДУ

Аннотация. Бул макалада туундусуна карата чечилбеген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди параметр кийирүү методу аркылуу чыгаруу каралат. Дифференциалдык теңдемелердин параметрдик ыкмалары биринчи тартиптеги теңдемелерди чыгарууда колдонулуучу күчтүү математикалык метод. Алгач, F(x, y, p) = 0 түрүндөгү теңдемени параметрдик формага келтирүү принциби түшүндүрүлүп, y жана v параметрлеринин жардамы менен y = ψ(u,v), x = φ(u,v), p = δ(u,v) катары берилет. Андан соң, бул параметрлерге байланышкан дифференциалдык теңдеме түзүлүп, v = w(u,c) түрүндөгү жалпы чыгарылышы табылат. Лагранж жана Клеронун ыкмалары параметр киргизүүнүн жалпы методдору аналитикалык түрдө чечүүнү жеңилдетет. Акырында, бир нече практикалык мисалдар аркылуу алынган теорияны колдонуу көрсөтүлөт. Бул мисалдарда теңдемелер параметрдик формада интегралдалып, алардын жалпы чыгарылышы табылат. Ушул сыяктуу дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышын изилдөө бир катар эмгектерде жарыяланып келген. Анын ичинен Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М. тарабынан иштелип чыккан эмгекти айтып кетсек болот.

Негизги сөздөр: дифференциалдык теңдеме, функция, параметр, жалпы чыгарылыш, ыкма, Липшицтин шарты, Коши маселеси.

Солтонкулова Ж.М.
кандидат физико-математических наук, доцент
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
soltonkulova77@mail.ru
Өгөнова А.
студент
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева

г. Бишкек
aiperiozgonovaa@gmail.com
Нурбекова Н.Н.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
nurbekova381@gmail.com

ОБЩИЙ МЕТОД ВВОДА ПАРАМЕТРОВ

Аннотация. В данной статье рассматривается решение дифференциальных уравнений первого порядка, не решенных относительно их производных, с использованием метода вставки параметров. Параметрические методы дифференциальных уравнений — мощный математический метод, используемый для решения уравнений первого порядка. Сначала объясняется принцип параметрического преобразования уравнения вида F(x, y, p) = 0 и задается как y = ψ(u,v), x = φ(u,v), p = δ(u,v) с использованием параметров у и v. Затем составляется дифференциальное уравнение относительно этих параметров и находится общее решение в виде v = w(u,c).

Методы Лагранжа и Клеро являются распространенными методами ввода параметров, которые облегчают аналитические решения.

Наконец, применение полученной теории демонстрируется на нескольких практических примерах. В этих примерах уравнения интегрируются в параметрической форме и находится их общее решение. Исследованию периодической производной такого дифференциального уравнения посвящен ряд работ, среди которых можно отметить работу, разработанную Алымбаевым А.Т. и Солтонкуловой Ж.М.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, функция, параметр, общее решение, метод, условие Липшица, задача Коши.

J.M. Soltonkulova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
soltonkulova77@mail.ru
A. Ogonova
student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
aiperiozgonovaa@gmail.com
N. Nurbekova
master's student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
nurbekova381@gmail.com

GENERAL METHOD FOR ENTERING PARAMETERS

Abstract. This paper discusses the solution of first-order differential equations that are not solved for their derivatives using the parameter insertion method. Parametric methods of differential equations are a powerful mathematical method used to solve first-order equations. First, the principle of parametric transformation of an equation of the form F(x, y, p) = 0 is explained and is given as y = ψ(u,v), x = φ(u,v), p = δ(u,v) using the parameters y and v. Then a differential equation is formed with respect to these parameters and the general solution is found in the form v = w(u,c).Lagrange and Clairaut methods are common parameter input methods that facilitate analytical solutions.Finally, the application of the obtained theory is demonstrated by several practical examples. In these examples, the equations are integrated in parametric form and their general solution is found. A number of works are devoted to the study of the periodic derivative of such a differential equation, among which one can note the work developed by Alimbaev A.T. and Soltonkulova Zh.M.

Keywords: differential equation, function, parameter, general solution, method, Lipschitz condition, Cauchy problem.

Коши маселеси үчүн жашоо жана жалгыздык теоремасы жөнүндө

Туундусуна карата чечилбеген теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат:

$$F(x,y(x),y'(x))=0(2.1.1)$$

Мында $F(x,y,y')$ белгилүү $G\subset R^3$ областында аныкталган функция. Биз G областындагы (x_0,y_0,y_0') чекитин карайбыз. Ушул чекиттин аймагында

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}¿¿_{x=x_0}¿_{y=y_0}¿y'=y'_0¿¿¿¿0¿$$

шарты аткарылсын дейли.

Анда айкын эмес функциянын теоремасынын негизинде (2.1.1) туюнтмасын y ке карата чечүүгө болот.

$$y'=f(x,y(x))(2.1.2)$$

(2.1.2) теңдемесине 1.4. параграфта далилденген теореманы колдонуп, эгерде $f(x,y)$ функциясы y аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырса, (2.1.2) теңдемесинин $y(x_0)=y_0$ шартын канааттандырган чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат. Биз ушуну текшеребиз

$$O=|F(x,y_2,y_2')-F(x,y_1,y_1')|=|F(x,y_2,y_2')-F(x,y_1,y_1')+F(x,y_1,y_2')-F(x,y_1,y_1')||=$$

$$¿|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1+\theta(y_2-y_1),y_2')(y_2-y_1)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2+\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1)|$$

Демек,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(\cdot)(y_2^1-y_1')=-\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot)(y_2-y_1)$$

Эгерде $|\frac{\partial F}{\partial y'}|\geq\alpha,$ ал эми $|\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot)|\leq M$ болсо, анда

$$\alpha\left(y_2'-y_1'\right)\leq\left|\frac{\partial F}{\partial y'}(\cdot)\right|\left|\left(y_2'-y_1'\right)\right|\leq M\left(y_2-y_1\right) \tag{2.1.3}$$

(2.1.3) барабарсыздыгынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|y_2'-y_1'|\leq\frac{M}{\alpha}|y_2-y_1|$$

же

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leq N|y_2-y_1|$$

$f(x,y)$ функциясы Липшицтин шартын канааттандырары далилденди.

Демек, $F(x,y,y')$ функциясы y,y' аргументтери боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуга ээ жана $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right|\geq\alpha$ болсо, $F(x,y,y')=0$ теңдемесин уке карата чыгарууга болот жана пайда болгон функция y аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырат.

Бул шарттар канааттандырылса, (2.1.1) тещдемесине теореманы колдонуп, (x_0,y_0) чекити аркылуу өткөн чыгарылышы жашаары жана жалгыз боло тургандыгы келип чыгат.

Бизге туундусуна карата чечилбеген төмөнкүдөй

$$F(x,y,p)=0 \tag{2.3.1}$$

теңдемеси берилсин. Эгерде биз x,y,pны мейкиндиктеги чекиттин декарттык катары карасак, анда (2.3.1) кандайдыр беттин теңдемеси болуп эсептелет. Бизге ушул беттин параметрдик формадагы теңдемеси белгилүү болсун дейли:

$$x=\phi(u,v) \qquad y=\psi(u,v) \qquad p=\delta(u,v) \tag{2.3.2}$$

$$p=\frac{dy}{dx} \quad \text{же} \quad dy=pdx$$

экендигин эске алып,

$$dx=\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v},dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv,$$

Акыркы туюнтмадан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\delta(u,v)\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right]$$

Бул u,v өзгөрүлмө чоңдуктарына карата биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме. Мында vны изделүүчү функция катары кабыл алып, акыркы теңдемени төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{\delta(u,v)\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\delta(u,v)\frac{\partial\phi}{\partial v}}$$

Демек биз туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеге ээ болдук. Эгерде биз анын жалпы чыгарылышы болсун десек,

$$v=w(u,c)$$

анда (2.3.2) нин биринчи эки барабардыгы

$$x=\phi[u,w(u,c)],y=\psi[u,w(u,c)]$$

түрүнө келет.

Бул (2.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формасы. Эгерде (2.3.1) теңдемеси *xке* же *yке* карата чечилсе, анда бул учурда (2.3.2) өзгөртүп түзүүсү колдонулат, параметр катары y рны же x, рны кабыл алабыз. Маселен, $y=f(x,p)$ теңдемесин карайлы. $dy=pdx$-ти эске алып жана $dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp$коюп,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp=pdx\,\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}=p \qquad (2.3.4)$$

ээ болобуз. Биз биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени алдык.

$p=\phi(x,c)$ бул теңдеменин жалпы чыгарылышы болсун дейли, анда

$y=f(x,\phi(x,c))$ (2.3.3) теңдемесинин жалпы чыгарылышы. Ушундай эле жол менен $x=f(y,p)$ теңдемесин чыгарууга болот.

Биз жогоруда туундусуна карата чечилбеген теңдемелерди параметр кийирүү методу аркылуу туундусуна карата чечилген теңдемелерге келтирдик. Алардын чыгарылышы интеграл түрүндө туюнтулуучу теңдемелерди карайлы.

Лагранждын теңдемеси. Эгерде (2.3.1) теңдемеси *xке* жана *yке* карата сызыктуу болсо, анда ал Лагранждын теңдемеси деп аталат жана төмөнкүдөй жазылат:

$$A(p)x+B(p)y=C(p)\,же\;y=\phi(p)x+\psi(p) \qquad (2.3.5)$$

Мында

$$\phi(p)=\frac{-A(p)}{B(p)},\psi(p)=\frac{C(p)}{B(p)},B(p)\neq 0:$$

Акыркы теңдеменин эеи жагын x боюнча туундулайбыз жана $p=\frac{dy}{dx}$ эске алып,төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dy}{dx}=\phi(p)\frac{dp}{dx}x+\phi(p)+\psi'(\mathrm{p})\,\frac{dp}{dx}$$

же

$$p=(\phi'(p)x+\psi'(p))\frac{dp}{dx}+\phi(p)$$

Мындан, эгерде xти белгисиз функция p дан көз каранды чоңдук катары кабыл алсак, анда төмөнкүдөй теңдемеге ээ болобуз:

$$(p-\phi(p))\frac{dx}{dp}=x\phi'(p)+\psi'(p)$$

Эгерде $\phi(p)\neq p$ болсо, эки жагын $p-\phi(p)$ туюнтмасына бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)}x+\frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}(2.3.6)$$

(2.3.6) $x(p)$ функциясына карата биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес теңдеме. Анын чыгарылышы 3-параграф боюнча төмөнкү түрдө болот:

$$x(p)=c\,e^{\int_{p_0}^{p}\frac{\phi'(s)}{s-\phi(s)}d\tau}+\int_{p_0}^{p}\frac{\psi'(s)}{s-\phi(s)}e^{\int_{s}^{p}\frac{\phi'(\tau)}{\tau-\phi(\tau)}d\tau}ds=cw(p)+\delta(p) \qquad (2.3.7)$$

Бул табылган маанини (2.3.5) теңдемесине коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$y(p)=\phi(p)[cw(p)+\delta(p)]+\psi(p)(2.3.8)$$

(2.3.8) жана (2.3.7) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын паремтрдик формада жазылышы. Эгерде бул эки теңдемеден p параметрин чыгарсак, анда

$$\hat{o}(x)=0$$

(2.3.5) теңдемесинин жалпы интегралы.

Клеронун теңдемеси. Эгерде (2.3.5) теңдемесинде $\phi(p)=p$ болсо, анда теңдеме Клеро теңдемеси деп аталат жана төмөнкү түрдө жазылат:

$$y=px+\psi(p)(2.3.9)$$

$(2.3.9)$ теңдемесинин эки жагын x аргументи боюнча туундулап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}x+p+\psi'(p)\frac{dp}{dx} \text{ же } p=\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))+p$$

Мындан

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))=0$$

Эки учурду карайбыз а) $\frac{dp}{dx}=0$, б) $x+\psi'(p)=0$. Мындан p=c анда

$$y=cx+\psi(p)$$

Клеронун теңдемесинин жалпы чыгарылышы

$$б)\, p'\neq 0, x+\psi(p)=0, x=-\psi'(p)(2.3.10)$$

Мындан $x=-\psi'(p)$.

Бул маанини (2.3.9) теңдемесине коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y=-p\psi'(p)+\psi(p)(2.3.11)$$

Эгерде p параметрдин ордуна t параметрин кийирсек, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x=-\psi'(t), y=-t\psi'(t)+\psi(t)(2.3.12)$$

$(2.3.12)$,(2.3.9) теңдемесин канааттандыра тургандыгын далилдейбиз.

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{(-\psi'(t)-t\psi''(t)+\psi(t)dt)}{\psi''(t)dt}=t,$$

$$-t\psi'(t)+\psi(t)\equiv -t\psi'(t)+\psi(t).$$

Бул чыгарылыш жалпы чыгарылыштан c турактуу чоңдугунун эч бир маанисинде алынбайт. (2.3.10) теңдемесин pга карата чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$p=w(x)(2.3.13)$$

$(2.4.13)$тү (2.4.9) теңдемесине коюп, жекече чыгарылышты алабыз:

$$y=w(x)+\psi[w(x)](1.4.14)$$

Бул чыгарылыш (1.4.9) жалпы чыгарылышынан c параметринини эч бир маанисинде алынбайт. (1.4.9) чыгарылышы xке карата сызыктуу функция. (1.4.14) чыгарылышы да сызыктуу функция болсун дейли, б.а.

$$xw(x)+\psi[w(x)]=ax+b$$

Мында a, b – турактуулар. Алдыдагы барабардыкты дифференциалдасак, анда

$$w(x)+xw'(x)+\psi'[w(x)w'(x)]=a$$

$w(x)$ функциясынын аныкталышын эске алсак, $\psi'[w(x)]=-x$.

Ушунун негизинде

$$w(x)+xw'(x)-xw'(x)=a$$

же болбосо

$$w(x)=a$$

Бул $w(x)$ функциясынын аныкталышына туура келбейт, (1.4.14)түн чыгарылышынын геометриялык маанисин көрсөтөлү. (1.4.14) чыгарылышы $y=cx+\psi(c), x+\psi'(c)=0$ теңдемесинен c параметрин чыгаруудан алынат. Алдыдагы теңдемелерден экинчиси

биринчинин с параметри боюнча туундусу. Бул процесс $y=cx+\psi(c)$ түз сызыктардын ийүүчүсүн табуу болуп эсептелет. Демек, (1.4.14) чыгарылышы өзгөчө чыгарылыш жана ал (1.4.9) түз сызыктарынын ийүүчүсү.

Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М. тарабынан иштелип чыккан эмгегинде сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин жалпы чыгарылышын тургузуу маселелери каралып кеткен [6].

Мисалдар:

1. $0=2y'+y'^2-¿x¿$ теңдемесин интегралдоо талап кылынсын. Бул теңдеме көз карандысыз өзгөрмөгө карата чечилет.

$x=2y'+y'^2$, $y'=t\,десек$, анда $x=2t+t^2$. ути t параметри аркылуу туюнталы. Ал үчүн $x=2t+t^2$ дифференциалдап жана $dy=tdx$ экенин эске алсак, төмөндөгү барабардыкка ээ болобуз:

$$dy=(2dt+2tdt)=2t(1+t)dt$$

Акыркы барабардыкты интегралдасак,

$$y=\int 2t(1+t)dt+c=¿t^2+\frac{2}{3}t^3+c¿$$

Жогорудагы xтин мааниси менен биргелештирсек, берилген теңдеменин параметрдик формадагы жалпы чыгарылышын алабыз:

$$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=t^2+\frac{2}{3}t^3+c \end{cases}$$

2. Мисал келтирели, $x=y'+\sin y'$. Бул теңдеме $y'\,ке$карата чыгарылбайт, бирок $xке$ карата чыгарылган. $y'=p$ деп алып, $x=p+\sin p$ экенин көрөбүз.

Эми жогорудагыдай эле

$$dy=pdx=p(dp+\cos pdp)=p(1+\cos p)dp$$

Муну интегралдасак,

$$y=\frac{1}{2}p^2+\int p\cos pdp+c=\frac{1}{2}p^2+p\sin p+¿\cos p+c¿$$

x жана ути биргелештирсек,

¿

берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Көз карандысыз өзгөрмөнү кармабаган теңдемеге мисал келтирели:

3. y = $y'^2+2y'^3$ теңдемесин интегралдоо керек. Бул $y'\,ке$карата чыгарылган теңдеме. $y'=t$ десек, анда y = $y=t^2+2t^3$. $dy=tdx$ барабардыгынан $dx=\frac{1}{t}dy$; $dy=(2t+6t^2)dt$ болгондуктан,

$$dx=\frac{2}{t}(1+3t)tdt=2(1+3t)dt$$

Мындан $x=2t+3t^2+c$. Акыркы барабардыкты у менен биргелештирсек, анда

$$\begin{cases} x=2t+3t^2+c \\ y=t^2+2t^3 \end{cases}$$

Берилген теңдеменин параметрдик формадагы жалпы чыгарылышы.

4. $y=e^{y'}\,y'^2$теңдемесин интегралдайлы. $y'=t\,десек$, $y=e^t\,t^2$.

Мындан $dy=(e^t t^2+2te^t)\mathrm{dt}$, $y'=t$, барабардыгынан $dx=\frac{1}{t}dy$; dy-тин туюнтмасын пайдаланып,

$$dx=\frac{1}{t}(e^t t^2+2te^t)\mathrm{dt}=e^t(t+2)dt$$

экендигин көрөбүз. Акыркы барабардыктын эки жагын интегралдасак, анда

$$x=\int e^t(t+2)dt+c=(t+2)e^t+e^t+c$$

у менен биргелештирсек,

$$\begin{cases} x=(t+2)e^t+c \\ y=e^t t^2 \end{cases}$$

жалпы чыгарылышы алынат.

Колдонулган адабияттар:

1. Матвеев Н. М. Дифференциалдык теңдемелер: окуу куралы студенттер үчүн. – Москва: Просвещение, 1988. – 256 б.
2. Пономарев К. К. Дифференциалдык теңдемелерди түзүү. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 560 б.
3. Амелькин В. В. Дифференциалдык теңдемелердин колдонмолору. – Москва: Наука, 1987. – 160 б.
4. Гунько В. Д., Суховеева Л. Ю., Смоленцев В. М. Дифференциалдык теңдемелер. Мисалдар жана типтүү тапшырмалар: окуу куралы. – Краснодар: КубГАУ, 2005. – 105 б.
5. Лелевкина Л. Г., Курманбаева А. К. Обыкновенные дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: КРСУ, 2016. – 190 б.
6. Солтонкулова Ж. М. Сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин жалпы чыгарылышын түзүү маселелерин кошумча билим берүү системасында каралуусу. – Бишкек: Арабаев жарчысы, 2023. – 120 б.

Рецензия: физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Баетов А.К.