5. Бобочко В.Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота/ В.Н. Бобочко // Известия вузов. Математика. 2006.- № 5. – С. 8–18.

6. Бобочко В.Н. Краевая задача для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с недиагонализируемым предельным оператором / В.Н. Бобочко // Известия вузов. Математика.М.- 1999.- № 4. – С. 14–23.

7. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора/ В.Н. Бобочко // Дифференциальные уравнения М.-1998.- Т.34б.- № 10. – С. 1304-1312.

8. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота/ Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. -Т. 22.- № 1.–С. 271-281.

9. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота / Д.А Турсунов // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. 1(21). –С. 34–39

УДК 517.928

БИСИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОУЛА СО СЛАБОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Алымкулов Келдибай, *д-р физ.-мат. наук, профессор, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: keldibay@mail.ru,*
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, *д-р физ.-мат. наук, доцент, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: d_osh@rambler.ru.*
Азимов Бектур Абдырахманович, *директор уч. центра «Адис» ОшГУ, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: bk_12@rambler.ru*

С обобщением асимптотического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Иманалиева построено асимптотическое разложение любого порядка по малому параметру решения краевой, бисингулярной задачи Коула со слабой особой точкой. С помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: бисингулярная задача, слабая особая точка, асимптотика, обобщенный метод пограничных функций, задача Дирихле, задача Коула, принцип максимума.

BISINGULARLY PROBLEM OF COLE WITH A WEAK TURNING POINT

Keldibay Alymkulov *full Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh,str. Lenina 331, e-mail: keldibay@mail.ru*
Dilmurat A. Tursunov *Associate Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: d_osh@rambler.ru*
Bektur A. Azimov *Manager of the Educational center "Adis", OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: bk_12@rambler.ru*

By generalized of the asymptotic method boundary function of Vishik-Lusternik-Imanalievs is constructed the uniform asymptotic expansion of the solution in power by the small parameter of the boundary value problem for the model equation of Cole. By using the maximum principle was obtain at the estimates of the remainder term.

Keywords: bisingular problem, weak singularity point, asymptotic, generalized method boundary functions, problem Dirichlet, problem Cole, the maximum principle.

Введение. Как нам известно, многие задачи механики сплошной среды, механики жидкости и т.п. описываются дифференциальными уравнениями содержащих малый параметр при старших производных [4]. Не всегда удается найти точные решения подобных уравнений, поэтому исследователи применяют либо асимптотические, либо численные, либо приближенно-аналитические методы. Основная сложность при решении вышесказанных уравнений появляется в окрестностях пограничных слоев. Такие задачи в гидродинамике называют погранслойными задачами. С помощью современных компьютеров иногда удается построить численные или аналитико-приближенные решения, но невозможно выяснить поведения решений в пограничных слоях, когда малый параметр стремится к нулю. В связи с этим исследователи предпочитают применять методы возмущений, т.е. асимптотические методы.

В данной работе мы исследуем асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коула [4]. Бисингулярнось по терминологии А.М. Ильина означает, что задача имеет две особенности: присутствие малого параметра при старшей производной и решение соответствующего уравнения имеет негладкое решение.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y''(x)+\sqrt{x}y'(x)-y(x)=0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, a, b – const, $y(x)$ – искомая функция.

Нетрудно заметить, что задача (1), (2) является бисингулярной.

Причиной название задачи (1)-(2) задачей Коула является то, что оно впервые встречается в его работе [4] при $y(0)=0$. В этой работе методом сращивания построена асимптотика решения по малому параметре до первого порядка. Однако это асимптотическое разложение приведено без обоснования. В работе [2] методом структурного сращивания исследована более общая задача, но обоснование, т.е. оценка для остаточного члена получено менее точно. А в работе [1] обобщенным методом пограничных функций получен главный член асимптотического разложения решения с обоснованием.

Цель настоящей работы доказать применимость обобщенного метода пограничных функций [1] и в другом варианте, который на наш взгляд является более удобной и уменьшает количество вычислений, а также существенно облегчает обоснование асимптотического разложения решения.

Пусть

$$y(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}z(x), \tag{3}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, $0<b$ – const.

После подстановки соотношения (3) в задачу (1)-(2), получаем:

$$\varepsilon\left(z''(x)+\frac{2}{\sqrt{x}}z'(x)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)z(x)\right)+\sqrt{x}z'(x)=0, \tag{4}$$

$$z(0)=ae^2/b,\qquad z(1)=1. \tag{5}$$

Решение задачи (4)-(5) ищем в виде

$$z(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(x)+\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\pi_k(t)+R(x,\varepsilon), \tag{6}$$

где $t=x/\mu^2$, $\varepsilon=\mu^3$, $R(x,\varepsilon)$ – остаточная функция.

Подставляя соотношение (6) в задачу (4)-(5), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{k+1}\left(z_k''(x)+\frac{2}{\sqrt{x}}z_k'(x)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)z_k(x)\right)+\sqrt{x}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k'(x)+$$

$$+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_k(t)+\frac{\mu}{t}\pi_k(t)\right)+ \tag{7}$$

$$+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt{x}R'(x,\varepsilon)=0,$$

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0)=ae^2/b,\pi_0(\tilde{\mu})=0,\ \tilde{\mu}=1/\mu^2, \tag{8}$$

$$\pi_{3k}(0)=-z_k(0),\pi_{3k}(\tilde{\mu})=0,\pi_m(0)=0,\ \pi_m(\tilde{\mu})=0,\ m\neq 3k,m,k\in N.$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$\sqrt{x}z_0'(x)=0,\ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \tag{9}$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$. Пусть $z_k(x)\equiv 0$. Тогда равенство (7) представимо в виде

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_k(t)+\frac{\mu}{t}\pi_k(t)\right)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt{x}R'(x,\varepsilon)=0,$$

или

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{3(n+1)}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_k(t)+\frac{\mu}{t}\pi_k(t)\right)+$$

$$+\left(\frac{\mu}{t}-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\right)+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt{x}R'(x,\varepsilon)=0.$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_0\equiv\pi_0''(t)+\sqrt{t}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\qquad \pi_0(0)=ae^2/b,\pi_0(\tilde{\mu})=0, \tag{10}$$

$$L\pi_1(t)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_0(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_0'(t), \tag{11}$$

$$L\pi_2(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_1(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_1'(t)-\frac{1}{t}\pi_0(t), \tag{12}$$

$$L\pi_k(t)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_{k-1}(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_{k-1}'(t)-\frac{1}{t}\pi_{k-2}(t),\ k=3,4,\ldots,3(n+1)$$

$$\pi_m(0)=0,\ \pi_m(\tilde{\mu})=0,\ m\in N. \tag{13}$$

$$\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt{x}R'(x,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\Phi(t,\mu),$$

$$R(0,\varepsilon)=0,R(1,\varepsilon)=0, \tag{14}$$

где $\Phi(t,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\pi_{3(n+1)}(t)-\frac{2}{\sqrt{t}}\pi_{3(n+1)}'(t)-\frac{1}{t}\pi_{3n+2}(t)-\mu\frac{1}{t}\pi_{3(n+1)}(t)$.

Решение задачи (10) имеет вид:

$$\pi_0(t)=\frac{ae^2}{b}A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\right)^{-1}.$$

Заметим, что $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t,\ \tilde{\mu}\to+\infty$.

Очевидно, что $Lz(t)=0$ имеет двух линейно независимых решений

$Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds=1$, при этом $Y(t)=O(t)\ t\to 0$, $0<X(t)\le 1$,

$$X(t)=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}\left(1-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3k-2)t^{-\frac{3n}{2}}+\ldots\right),\ t\to\tilde{\mu}. \quad (15)$$

Поэтому общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид $z(t)=C_1Y(t)+C_2X(t)$, C_1, C_2 – const. Отсюда вытекают леммы.

Лемма 1. Краевая задача $Lz(t)=0$, $z(0)=z(\tilde{\mu})=0$ имеет только нулевое решение.

Лемма 2. Задача

$$Lz(t)=f(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0, \quad (16)$$

имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$z(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}f(s)ds,$$

где $G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le\tilde{\mu},\end{cases}$ – функция Грина задачи (16), $f(t)\in C(0,\tilde{\mu}],\ f(t)=O(t^{-3/2}),t\to 0.$

Доказательство. Далее, через $l,l_{i,j}$ обозначим постоянные. Решение задачи (16), т.е. функцию $z(t)$ можно представить в виде:

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t),$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}f(s)ds,\ J_2(t)=Y(t)\int_0^t X(s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}f(s)ds.$

Достаточно доказать, что J_1 и J_2 удовлетворяют граничным условиям.

1) a) Если $t\to 0$ и $|Y(t)|\le lt,\ |f(t)|\le lt^{-3/2}$, то

$$|J_1(t)|\le\int_0^t ls^{-1/2}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\le l\sqrt{t},\ t\to 0.$$

b) $t\to\tilde{\mu}$

$$|J_1(t)|\le lt^{-1/2}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}\left[\int_0^1|Y(s)|e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}|f(s)|ds+\int_1^t|Y(s)|e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}|f(s)|ds\right]\le$$

$$\le lt^{-1/2}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}+lt^{-1/2}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}\int_1^t e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}s^{-3/2}ds\le$$

$$\le lt^{-1/2}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}+lt^{-1/2}\int_1^t s^{-3/2}ds=O(t^{-1}),\ t\to\tilde{\mu}$$

2) a) $t\to 0$

$$|J_2(t)|\le lt\left(\int_t^1 s^{-3/2}ds+\int_1^{\tilde{\mu}}s^{-2}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\right)=O(\sqrt{t}),\ t\to 0.$$

а) $) \; t \to \tilde{\mu}: \; |J_2(t)| \le l \int_t^{\tilde{\mu}} s^{-2} e^{\frac{2}{3}s^{3/2} - \frac{2}{3}s^{3/2}} ds = O(t^{-1}), \; t \to \tilde{\mu}$.

Поэтому $z(t)$ удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнению $Lz(t) = f(t)$, убеждаемся, что она удовлетворяет и уравнению.

Из леммы 2 вытекает существование и единственность решений задач (10)-(13), а также $|\pi_k(t)|<l=\text{const}$, $t \in [0, \tilde{\mu}]$, т.е. ограниченность.

Лемма 4. Асимптотические разложения решений задач (11)-(13) при $t \to \tilde{\mu}$ представимы в виде

$$\pi_{3k+1}(t) = t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} l_{3k+1,j} t^{-\frac{3}{2}j}, \quad \pi_{3k+2}(t) = t^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} l_{3k+2,j} t^{-\frac{3}{2}j},$$

$$\pi_{3k+3}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} l_{3k+3,j} t^{-\frac{3}{2}j}, k = 0,1,2,\ldots$$

Кроме того, $\pi_k(t) = O(\sqrt{t^k}), \; t \to 0, k = 0,1,\ldots$

Лемму 4 можно доказать двумя способами, либо используя лемму 3 и разложение (15), либо прямо из уравнений (11)-(13).

Таким образом, мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ и $\Phi(t,\mu)$ на отрезке [0, $\tilde{\mu}$], когда $\mu \to 0$.

Теперь перейдем к оценке остаточного члена. Пусть $R(x,\varepsilon) = e^{-2\sqrt{x}} r(x,\varepsilon)$, тогда задача (14) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon) + \sqrt{x} r'(x,\varepsilon) - r(x,\varepsilon) = e^{2\sqrt{x}} \varepsilon^{n+1} \Phi(t,\mu), \quad 0 < x < 1,$$
$$r(0,\varepsilon) = 0, r(1,\varepsilon) = 0,$$

Пусть $M = \max\limits_{t \in [0,\tilde{\mu}]} \Phi(t,\mu)$, $\mu \to 0$. Применяя теорему 26.4 [3], получаем:

$|r(x,\varepsilon)| \le \varepsilon^{n+1} M e^{2\sqrt{x}}$. Отсюда $|R(x,\varepsilon)| \le \varepsilon^{n+1} M$, $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,1]$.

Справедлива

Теорема. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x) = b e^{2(\sqrt{x}-1)} \left(1 + \sum_{k=0}^{3(n+1)} \mu^k \pi_k(t) \right) + O(\varepsilon^{n+1}), \; \varepsilon \to 0.$$

Список литературы

1. Алымкулов К.Асимптотика решения бисингулярной задачи Коула со слабой особенностью/ К. Алымкулов, Б.А. Азимов, Д.А. Турсунов // Приволжский научный журнал. 2016. – № 8 (60). – С. 5-8.
2. Зулпукаров А.З. Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.З. Зулпукаров - Ош, 2009. – 114 с.
3. Ильин А.М. Асимптотические методы в анализе/ А.М. Ильин, А.Р. Данилин– М.: Физматлит. – 2009. – 248 с.
4. Коул Дж. Методы возмущений в механике жидкости /Дж. Коул . – М.-Мир. 1972. –276с.